

Protokoll zum
physikalischen Anfängerpraktikum:
Adiabatexponent

Jan Korger, Studiengang Physik-Diplom, Universität Konstanz
Sonja Bernhardt, Studiengang Physik-Diplom, Universität Konstanz

durchgeführt am 06.10.2004

1 Theorie

1.1 Ideale Gase und wichtige Größen

Der Zustand eines Gases kann durch drei Zustandsgrößen eindeutig bestimmt werden:

- p : Druck
- V : Volumen
- T : Temperatur

Weitere wichtige Größen sind:¹

- n : Stoffmenge
- δQ : Wärmeaustausch mit der Umgebung
- δW : Arbeit
- dU : Änderung der innere Energie
- dS : Entropieänderung

Man bezeichnet ein Gas als ideal, wenn diese Größen durch das ideale Gasgesetz zusammenhängen:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad (1)$$

mit der universellen Gaskonstanten $R = 8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Die ideale Gasgleichung beschreibt viele reale Gase bei Temperaturen weit überhalb des Siedepunktes in guter Näherung.

1.2 Freiheitsgrade

Ein freies Molekül kann sich in drei Raumrichtungen bewegen, sich um drei Achsen im Raum drehen und seine Atome können innerhalb des Moleküls schwingen. Es hat also maximal drei Freiheitsgrade der Translation, drei der Rotation und zwei pro schwingungsfähigem System. Schwingungen zählen als je zwei Schwingungsgrade, da eine Schwingung zu potentieller und kinetischer Energie führt.

Nicht alle dieser Bewegungsmöglichkeiten sind bei jeder Temperatur möglich, da zu ihrer Anregung teilweise hohe Energien notwendig sind.

1.3 Wärmekapazität

Als Wärmekapazität bezeichnet man den Quotienten aus zugeführter Wärmenergie und Temperaturerhöhung des Systems:

$$c = \frac{\delta Q}{\delta T} \quad (2)$$

Man bezieht die Wärmekapazität üblicherweise auf eine Masseneinheit (*spezifische Wärmekapazität*) oder eine Stoffmengeneinheit (*molare Wärmekapazität*). Die Wärmekapazität hängt von den Randbedingungen der Wärmezufuhr ab. Die molare Wärmekapazität c_p bei konstantem Druck ist stets größer als diejenige bei konstantem Volumen (c_V), da sich das ideale Gas bei konstantem Druck ausdehnt, also mechanische Arbeit leistet. Diese Energie fehlt zur Erhöhung der inneren Energie; es muss also mehr Wärmenergie zugeführt werden, um dieselbe Temperaturerhöhung zu erreichen.

Man kann δQ der molaren Wärmekapazität bei konstantem Volumen aus (2) ausdrücken als die Anzahl der Teilchen pro Mol N_A multipliziert mit der Änderung derer mittleren kinetischen Energie $\delta \bar{E}_{\text{kin}}$. Nach der kinetischen Gastheorie, die hier nicht genauer betrachtet werden soll, entfällt auf jeden Freiheitsgrad f die mittlere kinetische Energie $\frac{1}{2}kT$ mit der Boltzmann-Konstante k . Folglich gilt mit $R := N_A \cdot k$ für die molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen:

$$c_V = \frac{\delta Q}{\delta T} = N_A \cdot \frac{\delta \bar{E}_{\text{kin}}}{\delta T} = N_A \cdot \frac{f \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot \delta T}{\delta T} = N_A \cdot k \cdot \frac{f}{2} = \frac{f}{2} \cdot R \quad (3)$$

Mit der Beziehung $c_p - c_V = R$ folgt für die molare Wärmekapazität bei konstantem Druck:

$$c_p = c_V + R = \left(\frac{f}{2} + 1 \right) \cdot R = \frac{f + 2}{2} \cdot R \quad (4)$$

¹Die Verwendung der Symbole d , ∂ , δ und Δ ist in der Literatur nicht einheitlich. Hier wird daher – soweit möglich und sinnvoll – auf die Schreibweise der Versuchsanleitung zurückgegriffen.

1.4 Adiabatenexponent

Der Adiabatenexponent, eine wichtige Größe in der Thermodynamik, ist definiert als der Quotient der molaren Wärmekapazitäten bei konstantem Druck bzw. Volumen. Er kann mit Hilfe von (4) und (3) aus der Anzahl der Freiheitsgrade f , die thermisch angeregt werden können, berechnet werden und ist daher temperaturabhängig:

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{f + 2}{f} \quad (5)$$

1.5 Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Der Erste Hauptsatz der Thermodynamik ist der Satz der Energieerhaltung: Die innere Energie U eines Systems kann sich nur durch den Transport von Energie in Form von Arbeit (δW) und Wärme (δQ) über die Grenze des Systems ändern, d.h.

$$dU = \delta Q + \delta W \quad (6)$$

1.6 Zustandsänderungen idealer Gase

Zustandsänderungen idealer Gase lassen sich besonders leicht beschreiben, wenn eine der Zustandsgrößen konstant bleibt.

- **isochor** ($V = \text{const}$): Aus dem idealen Gasgesetz (1) folgt das Gesetz von Charles:

$$\frac{p}{T} = \text{const} \quad (7)$$

- **isotherm** ($T = \text{const}$): Aus dem idealen Gasgesetz (1) folgt das Gesetz von Boyle-Mariotte:

$$p \cdot V = \text{const} \quad (8)$$

- **isobar** ($p = \text{const}$): Aus dem idealen Gasgesetz (1) folgt das Gesetz von Gay-Lussac:

$$\frac{V}{T} = \text{const} \quad (9)$$

- **adiabatisch** ($\Delta Q = 0 \Rightarrow S = \text{const}$): Aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik (6) folgt, dass am Gas verrichtet Arbeit zu 100% in innere Energie übergeht. Alle drei Zustandsgrößen ändern sich. Es gelten für ideale Gase die Poisson-Gesetze:

$$p \cdot V^\kappa = \text{const} \quad (10)$$

$$T \cdot V^{\kappa-1} = \text{const} \quad (11)$$

$$p^{1-\kappa} \cdot T^\kappa = \text{const} \quad (12)$$

κ bezeichnet hier den Adiabatenexponenten.

Adiabatische Prozesse sind in der Natur häufig, da bei ausreichend schnell ablaufenden Vorgängen in guter Näherung davon ausgegangen werden kann, dass kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet.

1.7 Fragen und Aufgaben

1.7.1 Erklären Sie den Zusammenhang zwischen dem Adiabatenexponenten κ und der Zahl f der Freiheitsgrade eines Gases

In den Abschnitten 1.3 und 1.4 wird Gleichung (5) hergeleitet.

1.7.2 Zeigen Sie, dass die drei Poisson-Gleichungen für adiabatische Zustandsänderungen unter Verwendung der idealen Gasgleichung ineinander umgeformt werden können

Man zeigt, dass jeweils die erste (10) und die zweite (11) bzw. die erste und die dritte (12) der Gleichungen unter der Voraussetzung des idealen Gasgesetzes (1) äquivalent sind. Daraus folgt direkt die Äquivalenz aller dreier Beziehungen untereinander:

Aus (1) folgt $p = \frac{nRT}{V}$. In (10) eingesetzt erhält man mit $nR = \text{const}$ Gleichung (11):

$$\begin{aligned} pV^\kappa &= \text{const} \\ \frac{nRT}{V} \cdot V^\kappa &= \text{const} \\ nRTV^{\kappa-1} &= \text{const} \Rightarrow TV^{\kappa-1} = \text{const} \end{aligned}$$

Außerdem folgt aus (1) $V = \frac{nRT}{p}$. In (10) eingesetzt erhält man (12):

$$\begin{aligned} pV^\kappa &= \text{const} \\ p \cdot \left(\frac{nRT}{p} \right)^\kappa &= \text{const} \\ p^{\kappa-1} T^\kappa (nR)^\kappa &= \text{const} \Rightarrow p^{\kappa-1} T^\kappa = \text{const} \end{aligned}$$

q.e.d.

2 Experiment

2.1 Methoden zur Messung des Adiabatenexponenten

2.1.1 nach Rüchardt und Flammersfeld

E. Rüchardt maß im Jahr 1929 die Schwingung einer Stahlkugel auf einer "Gasfeder" bestehend aus einer großen Gasflasche und einem Präzisionsglasrohr. Die Schwingung ist bei dieser Methode leider schwer zu beobachten, da sie stark gedämpft ist.

A. Flammersfeld verbesserte die Methode im Jahr 1972 dahingehend, dass er ein Rohr mit kleiner Öffnung in der Mitte und einen zylindrischen Schwingkörper verwendete. Lässt man nun unten ständig etwas Gas einströmen, beobachtet man ungedämpfte Schwingungen. Die geringe Menge des durchströmenden Gases ist nicht geeignet, um den Schwingkörper nach oben zu blasen; sie dient lediglich als Reibungsausgleich. Wir betrachten den Aufbau daher als reibungsfreie Variante von Rüchardts Versuch:

Der Schwingkörper ist im Gleichgewicht, wenn der durch seine Gewichtskraft $m_S g$ erzeugte Druck und der äußere Druck p_0 gerade durch den inneren Druck ausgeglichen werden:

$$p = p_0 + \frac{m_S g}{\pi r^2} \quad (13)$$

πr^2 ist die Grundfläche des Schwingkörpers.

Wir betrachten alle Prozesse als adiabatisch und leiten eine Bewegungsgleichung aus (10) her:

$$p(V) = \text{const} \cdot V^{-\kappa} \Rightarrow \frac{dp}{dV} = -\text{const} \cdot \kappa V^{-\kappa-1} = -(\text{const} \cdot V^{-\kappa}) \cdot \kappa \cdot V^{-1} = -\frac{p\kappa}{V} \quad (14)$$

$$\Rightarrow dp = -\frac{p\kappa}{V} \cdot \pi r^2 \cdot x \quad (15)$$

mit $dV = \pi r^2 \cdot x$, wobei x , die Auslenkung aus der Ruhelage ist. Diese Druckänderung führt zu einer Rückstellkraft, die nach Newton eine Beschleunigung verursacht:

$$m_S \cdot \ddot{x} = -\pi r^2 dp \quad (16)$$

Die Gleichungen (15) und (16) beschreiben also eine harmonische Schwingungen mit der Periodendauer τ :

$$\tau^2 = \frac{4m_S V}{\kappa p r^4} \quad (17)$$

An Stelle von m_S verwendet man die Gesamtmasse $m = m_S + m_G$, die auch die Masse des beschleunigten Gasanteils

$$m_G = M_G \cdot n = \frac{M_G p_0 V_R}{RT} \quad (18)$$

(aus (1); mit molaren Masse M_G , Temperatur T , Volumen des beschleunigten Gases im Rohr V_R) berücksichtigt, und erhält mit (13):

$$\kappa_{\text{RF}} = \frac{4Vm}{\tau^2 r^4 p} = \frac{4V \left(m_S + \frac{M_G p_0 V_R}{RT} \right)}{\tau^2 r^4 \left(p_0 + \frac{m_s g}{\pi r^2} \right)} \quad (19)$$

V ist das effektive Volumen des Kolbens.

2.1.2 nach Clément und Desormes

Das Experiment nach Clément und Desormes besteht aus einem großen Glaskolben (Volumen V_1) mit Gaszuleitung, Auslassventil und mit Wasser gefülltem U-Rohr zur Messung des Druckes im Kolben. Der äußere Luftdruck ist p_0 , die Umgebungstemperatur bezeichnet man als T_0 .

Als erster Schritt wird Kolben mit dem Gas so gefüllt, dass ein Überdruck entsteht. Hat das Gas im Kolben sich der Umgebungstemperatur $T_1 = T_0$ angepasst, wird der Überdruck

$$\Delta p_1 = p_1 - p_0 \quad (20)$$

über die Höhe der Flüssigkeitssäule h_1 unter der Ausnutzung der Beziehung

$$\Delta p_1 = \rho \cdot g \cdot h_1 \quad (21)$$

bestimmt.

Im zweiten Schritt wird das Auslassventil kurzzeitig geöffnet, so dass der Druck im Kolben auf den äußeren Luftdruck sinkt ($p_2 = p_0$). Das Volumen vergrößert sich hierbei adiabatisch auf V_2 und die Temperatur sinkt gemäß (12) auf

$$T_2 = \left(T_1^\kappa \cdot \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{1-\kappa} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = T_1 \cdot \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \quad (22)$$

Als dritter Schritt folgt die Erwärmung des Gases bei konstantem Volumen V_1 auf die Temperatur $T_3 = T_0$. Nach (7) stellt sich dabei der Druck

$$p_3 = p_2 \cdot \frac{T_1}{T_2} \quad (23)$$

ein. Man misst $\Delta p_3 = p_3 - p_0$ wie oben.

Mit $T_1 = T_3 = T_0$ und $p_2 = p_0$ berechnet man aus (23) und (22):

$$\begin{aligned} p_3 &= p_0 \cdot \frac{1}{\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}} \\ &= p_0 \cdot \left(1 + \frac{\Delta p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \\ \Rightarrow p_3 &\approx p_0 \left(1 + \frac{\Delta p_1}{p_0} \cdot \frac{\kappa-1}{\kappa} \right) = p_0 + \Delta p_1 \cdot \frac{\kappa-1}{\kappa} \\ \Rightarrow \Delta p_3 &\approx \Delta p_1 \cdot \frac{\kappa-1}{\kappa} \end{aligned}$$

und erhält:

$$\kappa_{\text{CD}} \approx \frac{\Delta p_1}{\Delta p_1 - \Delta p_3} = \frac{h_1}{h_1 - h_3} \quad (24)$$

2.2 Durchführung

Die Messung wird für jedes der drei Gase (N_2 , Ar und CO_2) nach beiden Methoden durchgeführt.

2.3 Messwerte und Auswertung

2.3.1 nach Rüchardt und Flammersfeld

Der äußere Luftdruck wurde bestimmt mit Hilfe eines digitalen Manometers, umgerechnet mit der internationalen Höhenformel; Temperatur abgelesen am digitalen Thermometer; Volumen des Rohres aus bekanntem Radius und Höhe nach Augenmaß: (Die Fehler berücksichtigen die Druck- und Temperaturschwankungen während des Versuchs.)

$$p_0 = 95953.7 \pm 100.0 \text{ Pa}$$

$$T_0 = 294.5 \pm 2.0 \text{ K}$$

$$V_R = (3.9 \pm 1.5) \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

κ berechnet aus den Messdaten mit Hilfe der Formel (19):

Gas	m_S in g	M_G in g/mol	τ in s	V in cm^3	κ
N ₂	9.84 ± 0.05	28.0	1.038 ± 0.005	2182 ± 1	1.361 ± 0.048
Ar	9.74 ± 0.05	39.9	1.012 ± 0.005	2257 ± 1	1.470 ± 0.051
CO ₂	9.73 ± 0.05	44.0	1.097 ± 0.005	2257 ± 1	1.249 ± 0.043

2.3.2 nach Clément und Desormes

Die U-Rohr-Manometer hingen nicht ganz waagrecht. Dieser Fehler (Höhendifferenz bei ausgeglichenem Druck) wurde berücksichtigt. κ berechnet nach (24), gemittelt über drei Messungen:

Gas	h_1 in mm	h_3 in mm	κ
N ₂	93 ± 2	21 ± 2	1.221 ± 0.085
	97 ± 2	15 ± 2	
	107 ± 2	17 ± 2	
Ar	88 ± 2	20 ± 2	1.161 ± 0.088
	93 ± 2	1 ± 2	
	93 ± 2	19 ± 2	
CO ₂	65 ± 2	14 ± 2	1.179 ± 0.117
	68 ± 2	8 ± 2	
	70 ± 2	8 ± 2	

2.4 Fehlerdiskussion

2.4.1 Fehler in der Versuchsanleitung

- Messung nach Rüchardt und Flammersfeld:

Bei der Versuchsdurchführung wird nicht darauf hingewiesen, dass der äußere Luftdruck p_0 , die Temperatur T_0 und das Volumen des Gases im Rohr V_R bestimmt werden müssen. p_0 wurde von anderen Experimentatoren zur selben Zeit am selben Ort notiert; T_0 konnte geschätzt werden, da die Temperatur zur fraglichen Tageszeit während der ganzen Woche nicht merklich schwankte; V_R musste nach Augenmaß bestimmt werden. (Zudem wird von in der Anleitung das Symbol T für Temperatur und Periodendauer verwendet.)

- Messung nach Clément und Desormes:

Nach Punkt 11, wenn die Temperatur des Gases die Umgebungstemperatur angenommen hat, muss die Höhe am U-Rohr h_1 gemessen werden. Da die Experimentatoren über eine gewisse Restintelligenz verfügen, wurde diese Größe notiert.

2.4.2 Vergleich mit den Literaturwerten

Gas	Messwert 2.3.1	Messwert 2.3.2	Literaturwert
N ₂	1.361 ± 0.048	1.221 ± 0.085	1.401
Ar	1.470 ± 0.051	1.161 ± 0.088	1.648
CO ₂	1.249 ± 0.043	1.179 ± 0.117	1.293

Die Literaturwerte liegen etwas außerhalb der abgeschätzten Fehlergrenzen. Der Grund hierfür ist, dass die Fehlerrechnung die vielen möglichen äußeren Störeinflüsse nicht berücksichtigt und Näherungen verwendet wurden.

3 Anhang

3.1 Literatur

- Bern-Uwe Runge: Versuchsanleitungen zum physikalischen Anfängerpraktikum
<http://ap.physik.uni-konstanz.de/Anleitungen.html>
- Wikipedia, die freie Enzyklopädie
<http://de.wikipedia.org>
- Petra Schneider: Die Eigenschaften der Gase
http://cweb.uni-bielefeld.de/agbi/cgi-bin-noauth/cache/VAL_BLOB/533/533/290/Eigenschaften%20von%20Gase.pdf
- Thomas Kirchner: Adiabatenexponent
2003