

Protokoll zum
physikalischen Anfängerpraktikum:
Dispersion und **BALMER**serie

Jan Korger, Studiengang Physik-Diplom, Universität Konstanz
Sonja Bernhardt, Studiengang Physik-Diplom, Universität Konstanz

durchgeführt am 08.10.2004

1 Theorie

1.1 Brechungsgesetz von Snellius

Ein Lichtstrahl wird gebrochen, das heißt er ändert seine Richtung, wenn er von einem transparenten Medium in ein anders übergeht. 1618 stellte Willebrord Snellius erstmals das Brechungsgesetz auf: Es beschreibt den Zusammenhang zwischen den Ausbreitungsgeschwindigkeiten c_1 , c_2 , die vom Medium abhängt, und dem Ein- bzw. Ausfallswinkel α_1 , α_2 zur Normalen der Grenzfläche hin gemessen. Außerdem ordnet es den Medien spezifische dimensionslose Brechungsindizes n_1 , n_2 zu, die für den Übergang von Medium 1 zum Medium 2 zur relativen Brechzahl $n_{1,2}$ zusammengefasst werden können.

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{1,2} \quad (1)$$

Das Medium mit dem größeren Brechungsindex heißt optisch dichter. Vakuum und näherungsweise Luft haben den Brechungsindex $n_{\text{Vakuum}} = 1$.

1.2 Dispersion

Dispersion hat in Physik, Chemie und Vogelkunde unterschiedliche Bedeutungen. In der Physik versteht man darunter die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Wellenlänge λ . Diese Abhängigkeit ergibt sich direkt aus (1), wenn man $c = \lambda \cdot f$ anwendet.

1.3 Prismenspektrometer

Eine Anordnung aus Lichtquelle, Prisma und Vergrößerungsobjektiv, welches drehbar auf einer Skala gelagert ist, so dass man den Ablenkwinkel einer Spektrallinie bestimmen, bezeichnet man üblicherweise als Prismenspektrometer¹.

Bei Kenntnis des Brechungsindex des Prismas kann man die Wellenlänge der Spektrallinie ermitteln.

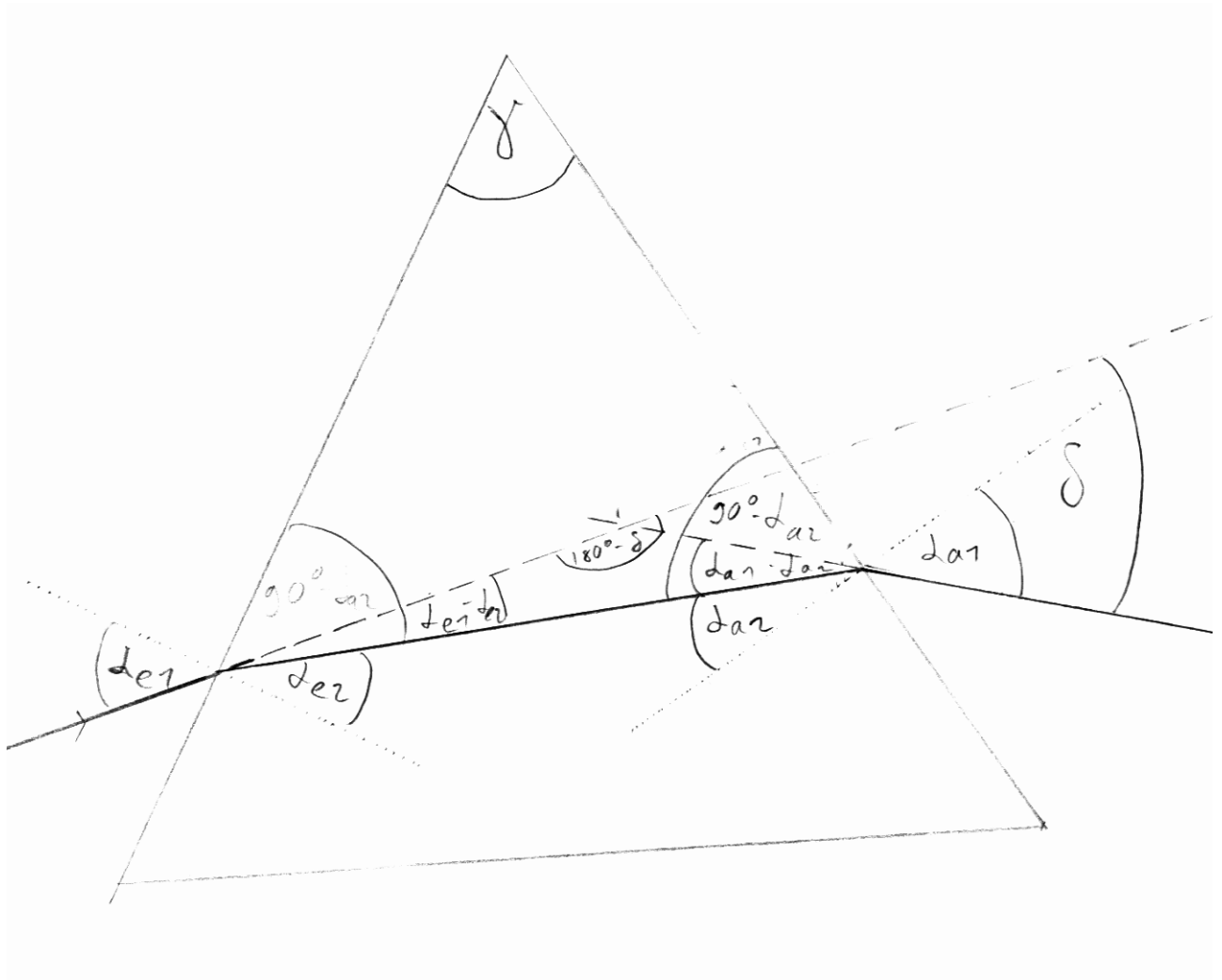
1.4 Ablenkungswinkel des Prismas

Licht trifft am Prisma auf die Grenzfläche zwischen Luft und Glas, durchquert dann das Prisma (auf ein wenig abgelenkter Bahn) und verlässt das Prisma wieder mit einem Übergang von Glas zu Luft. Aus (1) mit $n_{\text{Luft}} = 1$ folgt also

$$n_P = \frac{\sin \alpha_{e1}}{\sin \alpha_{e2}} = \frac{\sin \alpha_{a1}}{\sin \alpha_{a2}} \quad (2)$$

wobei $n_P > 1$ die Brechzahl des Prismas und Größen mit dem Index e den einfallenden, Größen mit a den aus dem Prisma austretenden Strahl bezeichnen.

¹im Süddeutschen auch "Prismenspektralapparat"



Die Ablenkung des austretenden Strahls gegenüber dem einfallenden bezeichnet man als δ . Es gilt (Winkelsumme im Dreieck, siehe Skizze):

$$(90^\circ - \alpha_{e2}) + (90^\circ - \alpha_{a2}) + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = \alpha_{e2} + \alpha_{a2} \quad (3)$$

sowie (Winkelsumme im Dreieck, siehe Skizze):

$$(180^\circ - \delta) + (\alpha_{e1} - \alpha_{e2}) + (\alpha_{a1} - \alpha_{a2}) = 180^\circ \Rightarrow -\delta + \alpha_{e1} + \alpha_{a1} - \alpha_{e2} - \alpha_{a2} = 0^\circ \quad (4)$$

mit (3):

$$\delta = \alpha_{e1} + \alpha_{a1} - \gamma \quad (5)$$

Um die Abhängigkeit vom Ausfallswinkel zu eliminieren berechnet man aus (2) und (3):

$$\begin{aligned} \sin \alpha_{a1} &= n_P \sin \alpha_{a2} = n_P \sin(\gamma - \alpha_{e2}) \\ \text{[Additionstheorem]} \quad &= n_P (\sin \gamma \cos \alpha_{e2} - \cos \gamma \sin \alpha_{e2}) \\ \text{[} \sin^2 + \cos^2 = 1 \text{]} \quad &= n_P \left((\sin \gamma) \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_{e2}} - \cos \gamma \sin \alpha_{e2} \right) \end{aligned}$$

Mit $n_P \cdot \sin \alpha_{e2} = \sin \alpha_{e1}$ erhält man schließlich den Ablenkungswinkel δ :

$$\sin \alpha_{a1} = n_P \cdot (\sin \gamma) \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_{e2}} - \cos \gamma \sin \alpha_{e1} \quad (6)$$

$$\Rightarrow \delta = \alpha_{e1} + \arcsin \left(n_P (\sin \gamma) \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_{e2}} - \cos \gamma \sin \alpha_{e1} \right) - \gamma \quad (7)$$

1.5 Minimaler Ablenkungswinkel δ_{\min}

Man bestimmt das Minimum der Funktion $\delta(\alpha_{e1})$. Notwendige Bedingung hierfür ist (mit (5)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial \alpha_{e1}} &= 0 & (8) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \alpha_{e1}}{\partial \alpha_{e1}} + \frac{\partial \alpha_{a1}}{\partial \alpha_{e1}} + \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_{e1}} &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{\partial \alpha_{a1}}{\partial \alpha_{e1}} + 0 &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \alpha_{a1}}{\partial \alpha_{e1}} &= -1 \\ \Rightarrow \frac{\partial \alpha_{a1}}{\partial \alpha_{e1}} = \frac{\partial \alpha_{a1}}{\partial \alpha_{a2}} \cdot \frac{\partial \alpha_{a2}}{\partial \alpha_{e2}} \cdot \frac{\partial \alpha_{e2}}{\partial \alpha_{e1}} &= -1 & (9) \end{aligned}$$

Aus (3) folgt:

$$\begin{aligned} \alpha_{a2} &= \gamma - \alpha_{e2} \\ \Rightarrow \frac{\partial \alpha_{a2}}{\partial \alpha_{e2}} &= -1 & (10) \end{aligned}$$

Aus (2) erhält man durch Differenzieren ($i := e, a$):

$$\begin{aligned} \sin \alpha_{i1} &= n_P \cdot \sin \alpha_{i2} \\ \Rightarrow \cos \alpha_{i1} \cdot \frac{\partial \alpha_{i1}}{\partial \alpha_{i2}} &= n \cdot \cos \alpha_{i2} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \alpha_{i1}}{\partial \alpha_{i2}} &= n \cdot \frac{\cos \alpha_{i2}}{\cos \alpha_{i1}} & (11) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \alpha_{i2}}{\partial \alpha_{i1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos \alpha_{i1}}{\cos \alpha_{i2}} \quad (12)$$

Einsetzen von (11), (10) und (12) in (9) liefert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{a1}}{\partial \alpha_{e1}} &= n \cdot \frac{\cos \alpha_{a2}}{\cos \alpha_{a1}} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos \alpha_{e1}}{\cos \alpha_{e2}} = -1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\cos \alpha_{a2}}{\cos \alpha_{a1}} = \frac{\cos \alpha_{e2}}{\cos \alpha_{e1}} \\ [\cos^2 = 1 - \sin^2] \quad \Leftrightarrow \frac{1 - \sin^2 \alpha_{a2}}{1 - \sin^2 \alpha_{a1}} &= \frac{1 - \sin^2 \alpha_{e2}}{1 - \sin^2 \alpha_{e1}} & (13) \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (2) lässt sich das weiter umformen:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \frac{1}{n_P} \sin^2 \alpha_{a1}}{1 - \sin^2 \alpha_{a1}} &= \frac{1 - \frac{1}{n_P} \sin^2 \alpha_{e1}}{1 - \sin^2 \alpha_{e1}} \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{n_P} \sin^2 \alpha_{a1}\right) \cdot (1 - \sin^2 \alpha_{e1}) &= \left(1 - \frac{1}{n_P} \sin^2 \alpha_{e1}\right) \cdot (1 - \sin^2 \alpha_{a1}) \\ \Leftrightarrow 1 - \sin^2 \alpha_{e1} - \frac{\sin^2 \alpha_{a1}}{n_P} + \frac{\sin^2 \alpha_{a1} \cdot \sin^2 \alpha_{e1}}{n_P} &= 1 - \sin^2 \alpha_{a1} - \frac{\sin^2 \alpha_{e1}}{n_P} + \frac{\sin^2 \alpha_{e1} \cdot \sin^2 \alpha_{a1}}{n_P} \\ \Leftrightarrow \sin^2 \alpha_{a1} &= \sin^2 \alpha_{e1} & (14) \end{aligned}$$

Wegen $\alpha_{e1}, \alpha_{a1} \in [0^\circ; 90^\circ]$ folgt daraus, dass der Ablenkungswinkel δ genau dann minimal wird wenn Ein- gleich Ausfallwinkel ist:

$$\alpha_{e1} = \alpha_{a1} \quad (15)$$

Man sagt dann, der Strahlengang ist symmetrisch.

Mit (5) folgt:

$$\alpha_{e1} = \alpha_{a1} = \frac{\delta_{\min} + \gamma}{2} \quad (16)$$

Aus Symmetriegründen muss ebenfalls gelten $\alpha_{e2} = \alpha_{a2}$ und mit (3):

$$\alpha_{e2} = \alpha_{a2} = \frac{\gamma}{2} \quad (17)$$

Aus (16) und (17) erhält man mit (2) eine Formel für den Brechungsindex n_P des Prismas in Abhängigkeit von δ_{\min} :

$$n_P = \frac{\sin\left(\frac{\delta_{\min} + \gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \quad (18)$$

1.6 “Brechender Winkel” eines Prismas

Auf ein die Schenkelflächen eines Prismas falle parallel Licht unter den Winkeln α bzw. β , welches dem Reflexionsgesetz (“Einfallswinkel = Ausfallswinkel”) gemäß reflektiert wird. Der Winkel zwischen den Prismaschenkeln sei wie oben als γ bezeichnet.

Der Winkel unter dem sich die (Verlängerung der) ausfallenden Strahlen schneiden ϑ lässt sich leicht als die Differenz der Positionen der beiden Strahlen auf einer Winkelskala messen. Wegen des Reflexionsgesetzes gilt $\vartheta = \alpha + \gamma + \beta$.

Ein einfallender Lichtstrahl teilt γ genau in β und α , also $\gamma = \alpha + \beta$. Folglich ist:

$$\vartheta = 2 \cdot \gamma \quad (19)$$

1.7 Bohr’sches Atommodell und Quantenzahlen

Das *Bohr’sche Atommodell* beruht auf zwei Postulaten, die sich erst später – mit Hilfe der Quantenmechanik – begründen ließen und die der klassischen Mechanik und Elektrodynamik widersprechen:

1. Ein atomares System hat stationäre Zustände mit bestimmten diskreten Energiewerten. Elektronen können sich nur auf bestimmten diskreten Kreisbahnen um den Atomkern bewegen.
2. Ein atomares System kann seine Energie nur ändern, indem es von einem stationären Zustand in einen anderen stationären Zustand übergeht. Wenn mit dem Übergang Emission oder Absorption von Strahlung verknüpft ist, so entspricht die Energie derer Photonen exakt der Energieänderung.

Hierzu kommt die *Auswahlbedingung*: Der Drehimpuls des Elektrons ist ein ganzzahliges Vielfaches von

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (20)$$

Das Bohr’sche Atommodell war auch das erste *Schalenmodell*, nach dem Elektronen in konzentrischen Schalen um den Kern angeordnet sind.

Das Bohr’sche Atommodell wurde vom Orbitalmodell abgelöst. Es basiert auf den Erkenntnissen der Quantenmechanik und benutzt an Stelle von Kreisbahnen lediglich Aufenthaltswahrscheinlichkeiten. Orbitale werden hier durch die Quantenzahlen m , n , l und s klassifiziert.

1.8 Balmer-Serie und Rydberg-Formel

In sichtbaren Spektrum lassen sich vier Spektrallinien des Wasserstoffs beobachten. Sie werden nach ihrem Entdecker, dem eidgenössischen Physiker und Mathematiker Johann Jakob Balmer, als Balmer-Serie bezeichnet.

Sie lassen sich sehr gut, durch die Formel von Rydberg, die sich auf Bohrs Atommodell stützt, beschreiben:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot Z^2 \cdot \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{mit: } n > m \quad (21)$$

Die Ordnungszahl von Wasserstoff ist trivialerweise $Z = 1$. Die Rydberg-Konstante $R_H = 1.09677581 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ für das Wasserstoff-Atom erhält man aus der Rydberg-Konstante für unendlich große Kernmassen $R_\infty = 1.0973731534 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$, der Kernmasse m_K und der Elektronenmasse m_e mit der Beziehung:

$$R = \frac{R_\infty}{1 + \frac{m_e}{m_K}} \quad (22)$$

Der Grund für die Abweichung ist, dass bei der Bewegung eines Elektrons um den Kern auch der Kern sich bewegt. R_∞ hängt nur von der Elektronenmasse m_e ab, das entspricht einer unendlichen bzw. gegenüber m_e sehr großen Kernmasse. Ersetzt man die Elektronenmasse durch die *reduzierte Masse*

$$\mu = \frac{m_e \cdot m_K}{m_e + m_K} \quad (23)$$

erhält man die obige Formel.

m und n bezeichnen die Quantenzahlen. Die Balmer-Serie erhält man mit $m = 2$. Später wurden weitere Serien entdeckt, sie liegen im ultra-violetten oder infra-roten Teil des Spektrums.

Manchmal verwendet man auch die Rydberg-Frequenz:

$$\bar{R} = R_\infty \cdot c_0 \quad (24)$$

1.9 Fragen

1.9.1 Wodurch unterscheiden sich die Begriffe Rydbergkonstante und Rydbergfrequenz?

siehe Abschnitt 1.8, Gleichung (24)

1.9.2 Was bedeuten die in der Literatur verwendeten Symbole R_∞ , R_H , R_D und R_{He^+} ?

Die Symbole stehen für die Rydberg-Konstanten der Ein-Elektronen-Systeme Wasserstoff, Deuterium und Helium, sie ergeben sich aus Gleichung (22) in Abschnitt 1.8.

1.9.3 Was haben die Balmer-Serie des Wasserstoffs und die Pickering-Serie des einfach ionisierten Helium beinahe gemeinsam?

Nach (21) gilt für Balmer- und Pickering-Serie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_{\text{Balmer}}} &= R_H \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \\ &= R_H \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right) \\ \frac{1}{\lambda_{\text{Pickering}}} &= R_{\text{He}^+} \cdot 2^2 \cdot \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \\ &= R_{\text{He}^+} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(2n)^2} \right) \end{aligned}$$

Offensichtlich stimmt jede zweite Spektrallinie der Pickering-Serie beinahe mit einer Linie der Balmer-Serie überein, da $R_{\text{He}^+} \approx R_H \approx R_\infty$.

2 Experiment

2.1 Durchführung

Es wird der Aufbau verwendet, an dem das Prisma weniger kaputt aussieht.

- **Parallellicht herstellen**

Beleuchtungsspalt und Okular am Beobachtungsspalt werden so eingestellt, dass der Spalt scharf abgebildet wird. Die Spaltgröße wird so gewählt, dass dieser sehr intensiv, aber immernoch schmal wirkt.

- **Messung des doppelten "brechenden Winkels" ϑ des Prismas**

- **Messung des doppelten Minimalablenkungswinkel für sechs bestimmte Helium-Linien**

- **Messung des doppelten Minimalablenkungswinkel für die drei bekannten sichtbaren Wasserstoff-Linien**

2.2 Auswertung

2.2.1 Bestimmung des ‘‘brechenden Winkels’’ γ

$$\gamma = \frac{\vartheta}{2} = 59.5 \pm 1.0^\circ$$

Obwohl sich die Winkel an der Nonius-Skala sehr präzise ablesen lassen, muss bei allen Winkelmessungen von einem Fehler, der zunächst groß groß erscheint, ausgegangen werden: Man kennt die Ungenauigkeit der Skala nicht, insbesondere weiß man nicht, ob ein toter Gang vorliegt. Das Beobachtungsfernrohr hat zwar ein Fadenkreuz, welches jedoch sehr schlecht sichtbar ist, und wegen Störlicht und Schmutz auf der Linse musste der Mittelpunkt des Okulars geraten werden.

Weitere Messungen, die leider wegen Wackelns am Prisma keine Auswertung zulassen, bestätigen zumindest die Größenordnung.

2.2.2 Bestimmung des Brechungsindex in Abhängigkeit der Wellenlänge

Den Brechungsindex n_P erhält man mit (18) aus dem gemessenen minimalen Ablenkungswinkel δ_{\min} .

Nr	Farbe & Intensität	λ	δ_{\min}	n_P
1	rot	$6.6781 \cdot 10^{-7}$ m	$58.8 \pm 1.0^\circ$	1.728 ± 0.044
2	gelb	$5.8756 \cdot 10^{-7}$ m	$59.7 \pm 1.0^\circ$	1.738 ± 0.044
3	hellgrün	$5.0157 \cdot 10^{-7}$ m	$61.4 \pm 1.0^\circ$	1.753 ± 0.044
4	dunkelgrün	$4.9219 \cdot 10^{-7}$ m	$61.6 \pm 1.0^\circ$	1.755 ± 0.044
5	blau	$4.7131 \cdot 10^{-7}$ m	$62.3 \pm 1.0^\circ$	1.760 ± 0.044
6	blau-violett	$4.4715 \cdot 10^{-7}$ m	$63.2 \pm 1.0^\circ$	1.768 ± 0.044

Die Erwartungen bezüglich der Beziehung zwischen der Wellenlänge λ und n (normale Dispersion) werden erfüllt.

Den Fehler berechnet man wie folgt:

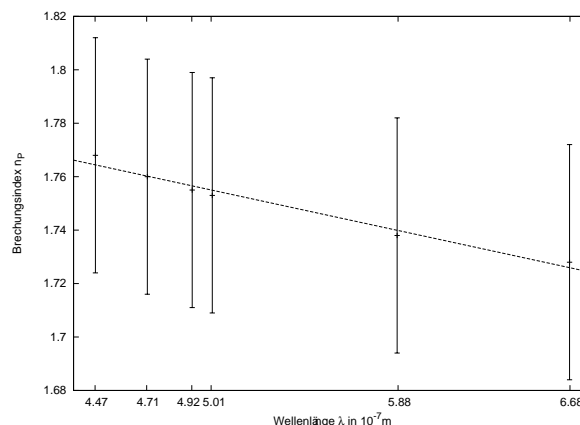
$$\frac{|\delta n|}{|n|} \approx \frac{\left| \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\delta_{\min} + \gamma}{2} \right) \right| \cdot (|\delta(\delta_{\min})| + |\delta\gamma|)}{\left| \sin \left(\frac{\delta_{\min} + \gamma}{2} \right) \right|} + \frac{\left| \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right| \cdot |\delta\gamma|}{\left| \sin \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right|}$$

Man ermittelt eine Ausgleichsgerade $n_P(\lambda) = a + b \cdot \lambda$ mit:

$$a = 1.84236 \pm 0.007429$$

$$b = (-0.0174324 \pm 0.001393) \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

Die Gerade legt nahe wesentlich geringere Fehler bei der Messung anzunehmen.



2.2.3 Bestimmung der Wellenlängen der Balmer-Linien

Man ermittelt wie oben aus den gemessenen minimalen Ablenkungswinkeln δ_{\min} den Brechungsindex n_P und schließt dann auf Grund der oben gewonnenen Daten von n_P auf die Wellenlänge:

$$\lambda(n_P) = \frac{n_P - a}{b}$$

Der Fehler ergibt sich wie folgt:

$$\frac{|\delta\lambda|}{|\lambda|} \approx \frac{|\delta n_P| + |\delta a|}{|n_P - a|} + \frac{|\delta b|}{|b|}$$

Nr.	Farbe	δ_{\min}	n_P	λ gemessen	λ Literatur (Fehler)
1	rot	$117.1 \pm 1.0^\circ$	1.727 ± 0.044	$(6.6018 \pm 2.9762) \cdot 10^{-7} \text{ m}$	$6.5628 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ (+0.59%)
2	grün	$123.3 \pm 1.0^\circ$	1.755 ± 0.044	$(5.0295 \pm 2.9530) \cdot 10^{-7} \text{ m}$	$4.8613 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ (+3.46%)
3	violett	$127.8 \pm 1.0^\circ$	1.774 ± 0.044	$(3.9304 \pm 2.9350) \cdot 10^{-7} \text{ m}$	$4.3050 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ (-8.70%)

2.2.4 Bestimmung der Rydbergkonstanten

Gemäß (21) ermittelt man den Mittelwert

$$R_H \approx 1.12 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

der im Rahmen der Fehlerabschätzung sehr gut mit dem Literaturwert übereinstimmt.

3 Anhang

3.1 Quellen

- Wikipedia, die freie Enzyklopädie
<http://de.wikipedia.org>
- Beste: Versuchsanleitungen zum physikalischen Anfängerpraktikum
1994
- Immo Wedekind: Prismenspektralapparat
<http://www.physik3.gwdg.de/~wedekind/Praktika/Anfaengerpraktikum/Versuch%2032/versuch32.pdf>
- Ekker, Blischke, Richter, Mucke, Ziese, Hoffmann: Optik-Projekt zur Bestimmung von Brechungsindizes
http://www.uni-potsdam.de/u/phys_gprakt/html/projekte/brechungsindex_alt/brechungsindex_1/prisma/prisma.html
- Thomas Kirchner: Dispersion und Balmerreihe
2003
- Prof. Dr. K. Uhlmann: Atomphysik / Teilchen-Welle-Dualismus / Spezielle Relativitätstheorie
http://www.unibw-muenchen.de/campus/ETTI/we1/uhlmann/AP_Atom_03.pdf