Physikalisches Anfängerpraktikum
an der Universität Konstanz:

Kreisel

Experiment durchgeführt am 09.05.2005

Jan Korger, Studiengang Physik-Diplom
Matthias Schork, Studiengang Physik, Mathematik (Lehramt)

1 Theorie

1.1 Drehbewegungen um eine Achse

Drehbewegungen lassen sich analog zu rein translatorischen Bewegungen beschreiben, wobei jede hier bekannte Größe ein Analogon für Drehbewegungen besitzt. Das Newton'sche Grundgesetz der klassischen Mechanik lautet speziell für Drehbewegungen:

$$\vec{M} = J\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

mit:

$$\text{Drehmoment: } \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{2}$$

$$\text{Drehimpuls: } \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} = J\vec{\omega} \tag{3}$$

$$\text{Winkelbeschleunigung: } \vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

$$\text{Winkelgeschwindigkeit: } \vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\omega \tag{5}$$

Das (Massen-)Trägheitsmoment J, auch Θ, entspricht formell der Masse. Bei bekannter Massendichte lässt sich das Trägheitsmoment leicht errechnen, für Punktmassen wird das Ganze besonders einfach:

$$J = \int_V \varrho(\vec{r}) r^2 \,\mathrm{d}\vec{r} \tag{6}$$

$$J_{\text{Massenpunkt}} = mr^2 \tag{7}$$

$\vec{r}$ ist hierbei stets der Orstvektor von der Drehachse aus gemessen.

Hilfreich ist hier noch der Steiner'scher Satz, nach dem man das Trägheitsmoment J_A bezüglich einer Achse A aus dem Trägheitsmoment J_S bezüglich der zu A parallelen Achse durch den Schwerpunkt des Körpers mit dem Abstand l dieser Achsen wie folgt erhält:

$$J_A = J_S + ml^2 \tag{8}$$

1.2 physikalisches Pendel

Ein physikalisches Pendel ist ein starrer Körper, der unter der Wirkung der Schwerkraft Drehbewegungen um eine feste Achse, die nicht durch seinen Schwerpunkt geht, ausführt.

Ist φ der Auslenkwinkel aus der Ruhelage, m seine Masse und l der Abstand zwischen Schwerpunkt und Drehachse, so erhält man mit (1):

$$-lmg\sin\varphi = M = J\alpha = J\ddot{\varphi} \tag{9}$$

$$\text{für kleine Winkel:} \qquad -lmg\varphi \approx J\ddot{\varphi} \tag{10}$$

Diese Dgl beschreibt einen harmonischen Oszillator mit der Periodendauer:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} \tag{11}$$

1.3 Kreisel

1.3.1 kräftefreier symmetrischer Kreisel

Als Kreisel bezeichnet man einen Körper, der sich um eine freie Achse $\vec{\omega}(t)$, die in einem Punkt unterstützt wird, dreht. Man nennt einen Kreisel "symmetrisch", wenn er rotationssymmetrisch um eine Figurenachse $\vec{c}$ genannte Achse durch seine Schwerpunkt ist. Ein Kreisel, auf den kein (äußeres) Drehmoment wirkt, heißt "kräftefrei". Offensichtlich ist dann nach (1) der Drehimpulsvektor konstant.

Fallen bei einem kräftefreien Kreisel $\vec{L} = \text{const}$ und $\vec{\omega}$ zusammen, rotiert der Körper um eine raumfeste Achse.

1.3.2 Nutation des kräftefreien symmetrischen Kreisel

Erfolgt die Rotation eines Kreisel nicht um eine der Hauptachsen, so führt der Kreisel eine Nickbewegung aus. Die Figurenachse bewegt sich auf einem Kegel, genannt Nutationskegel.

1.3.3 Präzession des schweren symmetrischen Kreisels

Unter Einfluss der Gravitationskraft wirkt auf den Kreisel ständig ein Drehmoment. (Der Schwerpunkt habe den Abstand r vom Stützpunkt). Dessen Komponente senkrecht zum Drehimpuls $\vec{L}$ ändert dessen Richntung nicht dessen Betrag; die Drehimpulsachse rotiert mit der Präzessionsgeschwindigkeit:

$$\omega_p = \frac{\mathrm{d}\varphi_d}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L}{L\,\mathrm{d}t} = \frac{M\,\mathrm{d}t}{L\,\mathrm{d}t} = \frac{M}{L} = \frac{M}{J\omega_R} = \frac{mgr}{J\omega_R} \tag{12}$$

Der Kreisel präzediert folglich umso langsamer je höher seine Rotationsgeschwindigkeit ω ist.

1.4 Fragen und Aufgaben

Die Fragen beziehen sich auf die Internet-Version der Versuchsanleitung vom 14. April 2005.

1.4.1 freihändig Fahrrad fahren

> §23 StVO: Sonstige Pflichten des Fahrzeugführers
> (3) [...] [Radfahrer] dürfen nicht freihändig fahren.

Wir betrachten das Vorderrad des Fahrrads als symmetrischen Kreisel. Die Rotationsachse fällt mit der Figuren- und Drehimpulsachse zusammen. Um beim Freihändigfahren lenken zu können, lehnt sich der Radfahrer oder die Radfahrerin, auf die Seite, nach der er oder sie steuern möchte und neigt dadurch auch das Vorderrad. Dadurch wirkt ein Drehmoment $\vec{M}$ oder eine Drehmomentin – wegen (2) senkrecht zur Drehimpulsachse des Vorderrads, welches dadurch gedreht wird. (Das entpricht einer Präzessionsbewegung.)

1.4.2 Päzession des Kreisels in der Atomphysik

Der präzedierende Kreisel hat ein bedeutendes Analogen in der Atomphysik: In einem äußeren Magnetfeld präzediert der Spin eines Atomkerns mit der "Larmorfrequenz".

Wirkt auf das magnetische Moment $\vec{\mu}$ der Bahnbewegung[1] ein Magnetfeld $\vec{B}$, so versucht es $\vec{\mu}$ parallel zu $\vec{B}$ auszurichten. Die umlaufenden Elektronen können als Kreisel mit dem Drehimpuls $\vec{L}$ verstanden werden, die auf dieses äußere Drehmoment $\vec{D} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ mit einer Präzessionsbewegung reagieren. Analog zu (12) erhält man für die Larmorfrequenz, wenn man zunächst den Winkel α zwischen $\vec{L}$ und $\vec{B}$ berücksichtigt:

$$\omega_L = \frac{D}{L \sin\alpha} = \frac{\mu B \sin\alpha}{L \sin\alpha} = \frac{\mu B}{L} \tag{13}$$

1.4.3 Unabhängigkeit der Larmorfrequenz von α

Man sieht in (13), dass ω_L unabhängig von α ist.

1.4.4 Larmorfrequenz für eine Elektronenkreisbahn

Das magnetische Moment einer mit der Stromstärke I umflossenen Fläche A ist:

$$\mu = IA; \quad I = \frac{\text{Ladung}}{\text{Umlaufdauer}} = \frac{e}{\frac{2\pi r}{v}}; \quad A = \pi r^2 \tag{14}$$

$$\Longrightarrow \mu = \frac{e v_e r}{2} \tag{15}$$

Der Drehimpuls eines Elektrons ist:

$$L = m_e r v_e \tag{16}$$

In (13):

$$\omega_L = \frac{e}{2m_e} \quad \text{q.e.d.} \tag{17}$$

2 Experiment

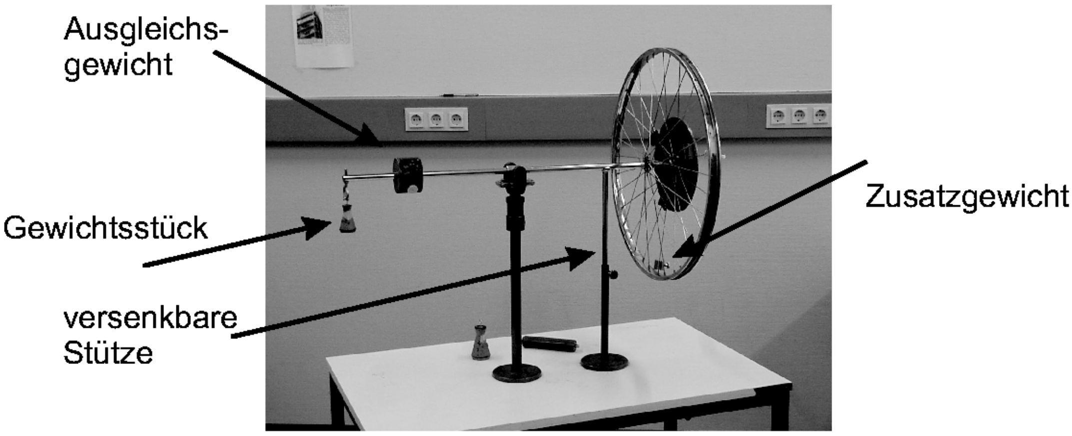

Abbildung 1: Versuchsaufbau [Quelle: Runge: Versuchsanleitung]

[1] Bohr'sches Atommodell

2.1 physikalisches Pendel

Ausgleichsgewicht und Stütze des "Kreisels" werden so eingestellt, dass die "Kreiselachse" horizontal liegt. Das Fahrrad-Rad kann nun um diese Achse rotieren. Durch Anbringen eines Zusatzgewichts ($m_Z = (93.63 \pm 0.10)\,\mathrm{g}$, $r_Z = (23.0 \pm 0.4)\,\mathrm{cm}$) an einer der Speichen des Rades verschieben wir den Schwerpunkt des Rades. Jetzt fallen Schwerpunkt und Rotatationsachse nicht mehr zusammen; wir haben ein physikalisches Pendel.

Wir lenken des Pendel etwas aus der Ruhelage und beobachten hübsche harmonische Schwingungen. Wir ermitteln drei mal die Periodendauer (als Mittel über 10 oder 20 Schwingungen):

$$T = (3.802 \pm 0.096)\,\mathrm{s} \qquad \text{(Standardabweichung des Mittelwerts)} \tag{18}$$

Nach (11) erhält man das Trägheitsmoment des Rades mit Zusatzgewicht:

$$J_Z = \frac{T^2 m_Z g r_Z}{(2\pi)^2} = 0.07736\,\mathrm{kg\,m^2} \tag{19}$$

Unter Berücksichtigung des Trägheitsmomentes des Zusatzgewichts als Massenpunkt (7) erhält man für das Rad:

$$J_{\text{Pendel}} = J_Z - m_Z r_Z^2 = 0.07241\,\mathrm{kg\,m^2} \tag{20}$$

Mit den gängigen Formeln zur Fehlerfortpflanzung erhält man für J_Z einen relativen Fehler von 6.9% und schließlich

$$J_{\text{Pendel}} = (0.07241 \pm 0.00552)\,\mathrm{kg\,m^2} \tag{21}$$

2.2 Kreisel

Wir entfernen das Zusatzgewicht und justieren das Ausgleichsgewicht, so dass die Kreiselachse ohne Stütze in der Horizontalen liegt, und messen den Abstand $r = (39.2 \pm 0.4)\,\mathrm{cm}$ des Ausgleichsgewichts vom Drehgelenk.

Für verschiedene Zusatzgewichte m ($\pm 0.1\,\mathrm{g}$) messen wir die Präzessionsgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Rotationsgeschwindigkeit: Die Kreiselachse wird auf die Sütze gedrückt und der Kreisel mit dem Elektromotor angetrieben. Wir lassen den Kreisel los, entfernen die Stützen und messen Rotations- und Präzessionsgeschwindigkeit durch Zählen der Umdrehungen. (Das erfasste Zeitinterval wird notiert.)

Aus (12) folgt: (Mittelwert über 18 Messungen mit drei verschiedenen Gewichten; Standardabweichung des Mittelwerts)

$$J_{\text{Kreisel}} = \frac{mgr}{\omega_P \omega_R} = (0.08634 \pm 0.00119)\,\mathrm{kg\,m^2} \tag{22}$$

2.3 Fehlerdiskussion und Vergleich des Messwerte

- Fehler, die beide Messungen betreffen
  - Die Gelenke machen nicht den Eindruck als könnte man sie als reibungsfrei annehmen.
  - Das Rad ist nicht symmetrisch. (Pendelbewegung auch ohne Zusatzgewicht)
- Fehler, die das physikalische Pendel betreffen
  - Die Näherung $\sin\varphi \approx \varphi$ ist umso schlechter erfüllt, je größer die Auslenkung ist. Große Auslenkungen lassen sich jedoch besser beobachten.

  Das Fehlerintervall für J_{Pendel} muss etwas größer angenommen werden.
- Fehler, die den Kreisel betreffen

- Die relativen Fehler der Bestimmung von m ($\approx 0.1\%$) und r ($\approx 0.3\%$) müssen zusätzlich zur angegebenen Standardabweichung (1.377%) berücksichtigt werden. Man erhält: $J_{\text{Kreisel}} = (0.0863 \pm 0.0015)\,\text{kg}\,\text{m}^2$ ($\approx 1.7\%$)
- Die Nutationsbewegung des Kreisel konnte nie vollkommen verhindert werden. Auch die Versuche die Nutation zu unterdrücken, beeinflussen die Messung.
- Zählen ist gar nicht so leicht, wenn's schnell geht.

Da es beim Kreisel viele Einflüsse gibt, deren Fehler wir nicht gut abschätzen können, muss man davon ausgehen, dass der Fehler mindestens so groß ist wie beim Pendel, obwohl die angebenen Fehlerschranken das Gegenteil suggerieren.

Beide Messwerte unterscheiden sich um knapp 18%, das liegt deutlich außerhalb der abgeschätzten Fehlergrenzen. Ein Fehler dieser Größenordnung ist jedoch zu erwarten, wenn man die gennanten weiteren Einflüsse und die sehr einfachen Messmethoden berücksichtigt.

A Literatur

- Dieter Meschede: Gerthsen – Physik
  21. Auflage, 2002, Springer
- Horst Stöcker: Taschenbuch der Physik
  5. Auflage, 2004, Verlag Harri Deutsch
- Wikipedia, die freie Enzyklopädie
  `http://de.wikipedia.org`
- Bernd-Uwe Runge: Versuchsanleitungen zum physikalischen Anfängerpraktikum
  `http://ap.physik.uni-konstanz.de/Anleitungen.html`
- Othmar Marti: Magnetische Eigenschaften der Materie
  `http://wwwex.physik.uni-ulm.de/Lehre/gk3b-2004-2005/node33.html`