Protokoll zum physikalischen Anfängerpraktikum M10: Saitenschwingungen

Jan Korger (561543), Physik Diplom, 2. Fachsemester

durchgeführt am 27.05.2004

1 Einleitung

1.1 Ziel

Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Länge, Spannung und Schwingungsfrequenz einer Metallsaite. Messung der Frequenzen für verschiedene Kombinationen von Saitenspannung und -länge mit Hilfe eines Stroboskops sowie mit einer Lichtschranke.

1.2 Zubehör

- zwei Metallsaiten der Länge $l = 1.20\,\mathrm{cm}$, eine davon mit variablen Gewichten spannbar
- Gewichtsstücke der Massen 1 kg, 2 kg, 3 kg, 5 kg und 10 kg.
- Lichtblitz-Stroboskop
- Lichtschranke mit elektronischem Frequenzzähler
- Keil zum Verkürzen des schwingenden Teils der Saiten

2 Theorie

2.1 Saitenschwingungen

Unter einer Saite versteht man ein langes, zylindrisches, verbiegbares Gebilde, dessen Querschnitt klein ist.

Ist eine Saite gespannt, das heißt an beiden Seiten befestigt, so kann sie, wird sie aus der Ruhelage ausgelenkt, traversale Schwingungen um die Ruhelage ausführen. Diese Schwingungen erzeugen Töne bei Musik-Instrumenten und werden in diesem Versuch untersucht.

Durch die Befestigung der Saitenenden ist festgelegt, dass die Saite hier in Ruhe bleibt, man nennt diese Punkte Bewegungsknoten. Die Stelle, an der die Saite maximal schwingt, bezeichnet man als Schwingungsbauch. Es handelt sich hier um eine stehende Welle.

Saiten können darüberhinaus bei geeigneter Anregung Longitudinalschwingungen oder Torsionsschwingungen ausführen. Darunter versteht man Schwingungen längst der Saite bzw. Schwingungen durch Verdrehen der Teilstücke der Saite gegeneinander. Beide haben für die Tonerzeugung in der Musik keine Bedeutung und werden hier nicht weiter diskutiert.

Saiten, die quer von Luft umströmt werden erzeugen manchmal Töne durch Luftwirbel, die vor und hinter der Saiten ausbilden. Es handelt sich hier nicht um eine Eigenschwingung der Saite, der Ton hängt daher auch nicht von der Länge der Saite ab.

2.2 Grund- und Oberschwingungen

Eine Saite hat undendliche viele (aber nur endlich hörbare) Eigenschwingungen. Die Schwingung, bei der sich nur an den Enden ein Knoten befindet, bezeichnet man als Grundschwingung oder 0. Oberschwingung. (Diese beiden Knoten werden in der Regel nicht mitgezählt.) Schwingungen mit k (zusätzlichen Knoten) nennt man analog k. Oberschwingung.

Ein sogennater Ton bei einem Musik-Instrument ist in Wirklichkeit der Zusammenklang aller Eingenschwingungen. Nach Fourier wird die Saite beim Anschlagen zunächst mit allen möglichen Frequenzen angeregt, wobei diejenigen, die Eigenschwingungen sind, die Saite in Schwingung versetzen. Die Harmonielehre lässt sich auf Oberschwingungen zurückführen. Die Tonintervalle über einem Grundton entsprechen den Oberschwingungen. Bei (wohlklingenden) Akkorden verstärkt man die ersten Oberschwingungen.

Bei der Grundschwingungen entspricht die Länge der Saite exakt einer halben Wellenlänge. Für die Frequenzen der Grund- und Oberschwingungen erhält man durch triviales Nachrechnen mit der Phasengeschwindigkeit $c = \lambda \cdot f$ und – wenn man 2.3 (8) vorweg nimmt:

$$f_k = \frac{1+k}{2 \cdot l} \cdot c = \frac{1+k}{2 \cdot l} \cdot \sqrt{\frac{F}{A \cdot \varrho}} \tag{1}$$

2.3 d'Alembert'sche Wellengleichung

Man betrachtet ein beliebiges Teilstück einer gekrümmten Saite an der Position x mit der Länge dx und der Masse $dm = \varrho \cdot A \cdot dx$.

Die Spannkraft $\vec{F}$, die an jedem Teilstück angreift, ist stets betragsgleich und tangetial zur Saite gerichtet. Die Kraft auf eine Teilstück setzt sich zusammen aus der Kraft, die von links (Position x), und der, die von rechts (Position $x + dx$) auf das Teilstück wirkt. Die Krümmung der Saite an der Postion x sei beschrieben durch den Winkel α gegenüber der Ruhelage. Analog gelte der Winkel $\alpha + d\alpha$ für $x + dx$.

Für die Rückstellkraft ist nur jeweils die Komponente der Kraft senkrecht zur Ruhelage F_R (in y-Richtung) entscheidend. Es gilt in Abhängigkeit der Spannkraft F_S:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_{\text{links}} + \vec{F}_{\text{rechts}} \\ F_R &= -F_\perp(x) + F_\perp(x+dx) \\ F_R &= -F_S \cdot \sin\alpha + F_S \cdot \sin(\alpha + d\alpha) = F_S \cdot (\sin(\alpha + d\alpha) - \sin\alpha) \end{aligned} \tag{2}$$

Für kleine Winkel α und $d\alpha$ gilt (Potenzreihe):

$$\sin(\alpha + d\alpha) = \sin\alpha + d\alpha \cdot \cos\alpha - \frac{(d\alpha)^2}{2!}\sin\alpha - \frac{(d\alpha)^3}{3!} + ...$$
$$\Rightarrow \sin(\alpha + d\alpha) - \sin\alpha \approx d\alpha \tag{3}$$

Also gilt mit (2) und

$$\alpha \approx \sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \tag{4}$$
$$\Rightarrow d\alpha \approx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{5}$$

in sehr guter Näherung:

$$F_R \approx F_S \cdot d\alpha \approx F_S \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \tag{6}$$

Mit der Beschleunigung F_B des Massenelementes nach Newton erhält man:

$$F_B = F_R$$
$$dm \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_S \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$
$$\varrho \cdot A \cdot dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_S \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F_S}{\varrho \cdot A} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{7}$$

Jede Funktion $f(x \pm c \cdot t)$ löst diese Differentialgleichung. In 2.2 (1) haben wir gesehen, dass gilt:

$$c^2 = \frac{F_S}{A \cdot \varrho} \tag{8}$$

2.4 Monochord

Eine Monochord ist ein Saiteninstrument mit nur einer Saite und einem einfachen Resonanzkörper, an dem schon Pythagoras forschte. Die Luft im diesem wird von der Saite in Schwingung versetzt, so dass der Ton hörbar wird. (Die Saite selbst ist nicht in der Lage die Umgebungsluft in Schwingung zu versetzen, da Überdruck vor der Saite und Unterdruck dahinter (bzw. vice versa) sich (da der Gangunterschied fast 0 ist) gegenseitig aufheben.

Unser “Monochord” hat zwei Saiten, von denen nur eine verwendet wird.

2.5 Stroboskop

Ein Stroboskop wird benutzt um Momentaufnahmen von Abläufen zu machen, die für die Wahrnehmung durch das menschliche Auge zu schnell ablaufen. Das Stroboskop gibt Lichtblitze in sehr regelmäßigen zeitlichen Abständen ab. Ist die Umgebung dunkel genug, wird sich das Auge auf die durch das Stroboskop erzeugte Helligkeit einstellen und daher nur Bilder sehen, wenn ein solcher Blitz die Szenerie beleuchtet. Es entstehen abgehackt erscheinende Bewegungen, die als eine Abfolge von stehenden Bildern erscheinen.

Periodische Abläufe erscheinen als unbewegtes Bild, wenn die Zeit zwischen zwei Blitzen ein ganzzahliges Vielfaches der Periodendauer ist.

2.6 Lichtschranke

Ein Lichtschranke besteht aus Lichtquelle (oft IR) und Sensor (Photodiode). Sie ermöglicht es auf Unterbrechungen des Lichtweges zu reagieren, z.B. die Anzahl der Unterbrechung pro Zeiteinheit zu zählen und daraus die Frequenz eines periodischen Vorgangs zu bestimmen.

2.7 Fragen

2.7.1 Diagramm mit doppelt logarithmischen Skalen bzw. $\frac{1}{l}$-Skala

Es ist – zumindest bei Auswertung von Hand – günstig die Skalen eines Messdiagramms so zu wählen, dass die theoretische Funktion im Schaubild eine Gerade ergibt. Dies erleichtert die Fehlerrechnung. Achsenabschnitt und Steigung der Geraden lassen sich leicht ablesen und interpretieren.

Nach (1) gilt

$$f(l) \sim 1/l$$
$$f(m) = \frac{\sqrt{g}}{2l\sqrt{A\varrho}} \cdot m^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow \log f = \log \frac{\sqrt{q}}{2l\sqrt{A\varrho}} + \frac{1}{2} \log m$$

2.7.2 Handelt es sich bei dem c in (8) um eine Phasen- oder eine Gruppengeschwindigkeit

Bei c handelt es sich um eine Phasengeschwindigkeit, der durschnittlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle. Unter einer Gruppengeschwindigkeit versteht man die Geschwindigkeit mit der sich ein Wellenpaket fortbewegt.

2.7.3 Um welchen Faktor muss man die Kraft zum Spannen der Saite vergrößern, um sie eine Oktave höher schwingen zu lassen?

Um eine Oktave höher, d.h. die doppelte Frequenz zu erreichen, benötigt man nach (1) die vierfache Kraft.

2.7.4 Zeigen Sie, dass jede Funktion der Form $y = f(x \pm c \cdot t)$ eine Lösung der Wellengleichung (7) ist

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f'(x \pm ct) \cdot (\pm c)$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f''(x \pm ct) \cdot c^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

2.7.5 Gerät der "Resonanzboden" einer Geige wohl bei bestimmten Frequenzen in Resonanz

Nein, die Luft im Resonanzkörper ist für die Verstärkung der Töne verantwortlich. Der Korpus selbst hat Resonanzfrequenzen außerhalb des hörbaren Bereichs.

2.7.6 Sind Bewegungsbäuche oder -knoten an den Enden möglich, was bedeutet das für die Frequenzen der Eigenschwingungen?

Es sind weitere Eigenschwingungen möglich. Da zwischen zwei Knoten stets ein Bauch liegt gilt analog zu (1):

$$f_k = \frac{1+k}{l} \cdot \sqrt{\frac{F}{A \cdot \varrho}}$$

3 Experiment

3.1 Versuchsdurchführung

Die Saite wird mit verschiedenen Massen gespannt und zum Teil auf unterschiedliche Anteile ihrer ursprünglichen Länge verkürzt. (Man wählt die Längen so, dass man Oberschwingungen der ursprünglich untersuchten Schwingung erhält.) Auf Anraten des Praktikumsbetreuers hin, wurde als die Länge mit einem Keil verkürzt wurde – wie bei einer Gitarre – die Saite mit dem Finger hinter dem Keil eingedrückt.

Die Frequenz wird zum einem mit Hilfe eines Stroboskops bestimmt. Hierbei wird Frequenz des Stroboskops variert bis eine stehendes Bild (in dem eine Saite zu sehen ist) beobacht wird. Zur Kontrolle wird die doppelte Frequenz bestimmt. (Hierbei sieht man das Bild der Saite an zwei Positionen.)

Davon unabhängig misst man mit einer Lichtschranke die Anzahl der Nulldurchgänge pro Zeiteinheit, das heißt die doppelte Frequenz.

Keines der Messgeräte wurde geeicht. Leider verfüge ich nicht über das "absolute Gehör".

3.2 Messdaten

3.2.1 Messung mit Stroboskop

Masse m/kg	Länge l/cm	Frequenz f/Hz
5.0	120.0	74.0
6.0	120.0	80.0
7.0	120.0	86.0
8.0	120.0	82.0
10.0	120.0	100.0
12.0	120.0	118.0
14.0	120.0	118.0
15.0	120.0	122.0
9.0	120.0	96.0
9.0	96.0	64.0
9.0	90.0	41.0
9.0	80.0	34.5
9.0	72.0	31.0
9.0	64.0	43.5
9.0	106.7	106.0
9.0	100.0	112.0

3.2.2 Messung mit Lichtschranke

Masse m/kg	Länge l/cm	Frequenz f/Hz
		76.0
		76.0
		76.5
5.0	120.0	76.5
		76.5

		77.0 76.0
6.0	120.0	83.5 83.5 83.5 83.0 83.0 83.0
7.0	120.0	90.0 89.5 89.5 90.0 90.0 90.0 89.5 90.0 89.5
8.0	120.0	96.0 96.0 96.0 96.0 95.5 96.0 96.0
10.0	120.0	107.5 107.5 107.0 107.5 107.0 107.5 107.0
12.0	120.0	117.5 117.5 117.5 117.5 117.5 117.5 117.5
14.0	120.0	127.5 127.5 127.0 127.5 127.0 127.0

		127.0
		127.5
15.0	120.0	131.5
		131.5
		131.5
		131.5
		131.5
		131.5
9.0	120.0	101.5
		101.5
		101.5
		101.5
		102.0
		101.5
		101.5
		101.5
9.0	96.0	62.5
		64.0
		63.5
		64.0
		64.0
9.0	90.0	68.0
		91.0
		94.5
		76.5
		81.0
		77.0
		86.0
		70.0
		75.5
		74.5
		87.5
		74.0
		113.0
		102.5
		62.5
		76.0
		96.0
		97.5
		93.5
		80.5
		77.0
		76.5
		94.0
9.0	80.0	

		94.0 64.5 68.0 56.5 71.0 70.5 56.0
9.0	72.0	47.0 25.5 23.5 28.5 35.5 22.5 23.5 33.5 25.5 35.0 23.0
9.0	64.0	96.5 122.0 130.0 99.0 132.0 109.0 126.0
9.0	106.7	115.0 114.0 114.0 113.5 114.0 114.0
9.0	100.0	122.0 122.0 119.0 122.0 122.0 122.0 121.5
9.0	60.0	104.0 103.5 103.0 103.5 103.5

4 Auswertung

4.1 Frequenz in Abhängigkeit der angehängten Masse

Die Ausgleichsfunktionen wurden numerisch nach der Methode der geringsten Fehlerquadrate mit dem Ansatz

$$f(m) = a * x^b$$

bestimmt. (Auf die Einheiten sei hier verzichtet. Sie ergeben sich durch triviales Nachrechnen.) mit Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} a_{Lichtschranke} &= 34.0223 \pm 0.08561 \\ b_{Lichtschranke} &= 0.499101 \pm 0.001078 \\ a_{Stroboskop} &= 32.5166 \pm 3.413 \\ b_{Stroboskop} &= 0.492443 \pm 0.04483 \end{aligned}$$

Theoretisch zu erwarten wäre nach (1):

$$f(m) = \frac{1}{2 \cdot l} \cdot \sqrt{\frac{F(m)}{A \cdot \varrho}} \Rightarrow b_{Theorie} = \frac{1}{2}$$

4.2 Frequenz in Abhängigkeit der Saitenlänge

Ausgleichsfunktion mit dem Ansatz

$$f\left(\frac{1}{l}\right) = c \cdot \frac{1}{l}$$

ergibt

$$\begin{aligned} c_{Lichtschranke} &= 56.416 \pm 2.882 \\ c_{Stroboskop} &= 42.9328 \pm 11.36 \end{aligned}$$

Betrachtet man bei der Messung mit der Lichtschranke jeweils nur den geringsten Wert pro Länge ergibt sich (siehe 4.3.2):

$$c_{Lichtschranke} = 53.1864 \pm 9.216$$

4.3 Fehlerdiskussion

4.3.1 Abweichung zwischen Stroboskop und Lichtschranke

Offensichtlich liegt bei mindestens einem der beiden Messverfahren ein systematischer Fehler vor. Keines der Geräte wurde vor dem Versuch geeicht.

4.3.2 Messung bei verkürzter Saitenlänge

Da erste Messung beweißt, dass systematische und statistische Fehler der Messmethoden wesentlich kleiner sind als die hier beobachteten Abweichungen, ist ein weitere Fehler bei der Durchführung zu suchen. Da die Versuchssituation sich nur durch das Verkürzen der Saitenlänge unterscheidet, ist hierbei der Fehler zu erwarten.

Wie in 3.1 erwähnt wurde die Saite hinter dem Keil eingedrückt, um zu verhindert, dass die Saite bei eventuell zu geringer Spannung – ungehindert vom Keil – schwingt wie bisher. Hierbei lässt es sich nicht vermeiden, die Saite zusätzlich zu spannen. Nach (1) erhöht das die Frequenz. Es liegt also Nahe zur Auswertung nicht den Mittelwert aller Messungen, sondern den jeweils niedrigsten Wert pro Länge zu betrachten. Leider erscheinen die Messwerte immer noch sehr schlecht.

Besser Ergebnisse bekäme man durch Drücken der Saite auf den Keil oder durch Verwendung eines Keils, der groß genug ist, dass er von alleine die Saite verkürzt.

5 Anhang

5.1 Quellen

- Bermann-Schaefer – Lehrbuch der Experimentalphysik: Band 1: Mechanik, Akustik, Wärme
- D. Meschede – Gerthsen Physik
- http://www.de.wikipedia.org

5.2 Software

- LaTeX 2_ε
- gnuPlot