

Physikalisches Anfängerpraktikum  
an der Universität Konstanz:

**Stromwaage**

Experiment durchgeführt am 08.02.2005

Jan Korger, Studiengang Physik-Diplom  
Nina Laible, Studiengang Biologie-Diplom

## 1 Einleitung

Im Experiment wird die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld eines Elektromagneten gemessen. Aus den gewonnenen Daten errechnet man  $\mu_0$ . Da  $\mu_0$  jedoch per Definition festgelegt ist, ist diese Bestimmung nicht von praktischem Interesse.

## 2 Theorie

### 2.1 Magnetische Felder

Magnetische Felder werden durch die beiden Größen  $\vec{H}$  und  $\vec{B}$  beschrieben. Der Begriff der "magnetischen Feldstärke" wird in der Literatur nicht einheitlich verwendet. Oft bezeichnet er das  $\vec{H}$ -Feld,  $\vec{B}$  heißt dann "magnetische Flussdichte" oder (noch älter) "magnetische Induktion". Moderne Literatur zieht es jedoch zunehmend vor,  $\vec{B}$  als magnetisches Feld zu bezeichnen,  $\vec{H}$  heißt dann "magnetische Erregung". Wir verwenden daher stets die Symbole  $\vec{B}$  oder  $\vec{H}$  zur Vermeidung von Unklarheiten.

Im Vakuum gilt:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}; \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} = 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad (1)$$

Die Einheiten sind  $[H] = \text{A/m}$  und  $[B] = \text{T} = \text{Vs/m}^2$ .

#### 2.1.1 Magnetsicher Fluss, Spannung und Widerstand

Das Flächen-Integral

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (2)$$

nennt man magnetischer Fluss. Seine Einheit ist  $[\Phi] = \text{Vs}$ .

Ganz analog zur elektrischen Spannung nennt man das Linien-Integral

$$V_{\text{mag}} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{s} \quad (3)$$

magnetische Spannung zwischen den Punkten A und B. Die Einheit der magnetischen Spannung ist  $[V_{\text{mag}}] = \text{A}$ .

Den elektrischen Widerstand definiert man als Quotient aus Spannung und Fluss

$$R_{\text{mag}} = \frac{V_{\text{mag}}}{\Phi} \quad (4)$$

mit der Einheit  $[R_{\text{mag}}] = \text{A/V s}$ . Reihen- und Parallelschaltungen von magnetischen Widerständen folgen den von elektrischen Widerständen bekannten Gesetzen:

$$R_{\text{Reihe}} = \sum_i R_i \quad (5)$$

$$\frac{1}{R_{\text{parallel}}} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad (6)$$

Die Kirchhoff'schen Maschen- und Knotenregeln gelten analog.

### 2.1.2 Durchflutungsgesetz

Aus der Maxwell-Gleichung  $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$  folgt, dass das Integral der Feldstärke über einen geschlossenen Weg gleich der Durchflutung der umschlossenen Fläche, d.h. dem Strom durch die Fläche, ist:

$$\Theta = \int_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{j} \cdot dA \quad (7)$$

Umgibt der Weg  $N$  Windungen einer Spule, so ist folglich:

$$\Theta = NI \quad (8)$$

### 2.1.3 Magnetfelder in Materie

In Materie gilt

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (9)$$

wobei  $\mu_r$  eine Materialgröße und nicht zwangsläufig konstant ist. Dies rührt daher, dass durch ein Magnetfeld in Materie elementare magnetische Dipole ausgerichtet werden können, was die Stärke des  $\vec{B}$ -Feldes beeinflusst. Man unterscheidet Dia-, Para- und Ferromagnetismus.

In diamagnetischen Materialien werden Induktionsströme induziert, die gemäß der Lenz'schen Regel dem erzeugenden Magnetfeld ein Gegenfeld entgegensetzen, d.h.  $\mu_r < 1$

Auch bei Paramagneten existiert dieser Effekt, wird jedoch dadurch überkompensiert, dass sich elementare magnetische Dipole so ausrichten, dass sie das Feld verstärken, d.h.  $\mu_r > 1$ . Paramagnetismus tritt bei Elementen mit ungepaarten Elektronen auf, da kreisende Elektronen einen Strom darstellen, der wiederum ein magnetisches Moment hervorruft. Bei Elektronenpaaren wird der Effekt durch das zweite Elektron kompensiert.

Bedeutend extremer verstärken Ferromagnete das magnetische Feld, was im folgenden Abschnitt erklärt wird. Des weiteren gibt es noch Antiferro- und Ferrimagnetismus, worauf wir hier nicht näher eingehen wollen.

### 2.1.4 Ferromagnetismus

Stoffe wie Nickel, Kobalt und natürlich Eisen nennt man ferromagnetisch. Dieser Effekt beruht auf der Wechselwirkung der Elektronenspins im Kristallgitter, weshalb er nur in Festkörpern auftritt. In diskreten Bereichen des Festkörpers (sog. Weißsche Bezirke) sind alle magnetischen Momente in eine bestimmte Richtung orientiert, woraus in diesem Bereich ein sehr starkes Magnetfeld resultiert. In unmagnetisierten Ferromagneten mitteln sich die Magnetfelder der einzelnen Weißschen Bezirke zu Null. Legt man aber ein äußeres Feld an, so werden an den Bezirksgrenzen magnetische Momente ausgerichtet, so dass die Grenzen der Weißschen Bezirke (Bloch-Wände) zu Gunsten der in Feldrichtung ausgerichteten Bezirke verschieben. Dies führt zu einer Verstärkung des B-Feldes.

Sind schließlich alle Bereiche zu einem gleich polarisierten vereinigt, spricht man von Sättigung des Ferromagneten.

Durch Gitterfehler im Ferromagneten bleibt bei Abschalten des äußeren Feldes ein Rest- $\vec{B}$ -Feld, die Remanenz, erhalten. Das rührt daher, dass sich nicht alle Weißschen Bezirke wieder umpolarisieren. Erst durch Anlegen eines Feldes in die andere Richtung (Koerzitivfeld) lässt sich das B-Feld wieder neutralisieren.

Die  $\vec{B}$ -Feldstärke in Abhängigkeit der  $\vec{H}$ -Feldstärke bezeichnet man als Hysteresekurve, welche im gleichnamigen Versuch bereits ausführlich diskutiert wurde.

$\mu_r$  kann bei Ferromagneten bis zu 1000mal so hoch wie bei Paramagneten sein.

### 2.1.5 magnetische Feldenergie

Die Energie eines magnetischen Feldes ist:

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2\mu_0\mu_r} H^2 \quad (10)$$

### 2.1.6 Feldverhalten an Grenzflächen

Beim Übergang zwischen zwei Medien mit verschiedenen Werten für  $\mu_r$ ,  $\mu_1$  bzw.  $\mu_2$ , ändern sich die magnetischen Felder im Allgemeinen. Wir gehen von einer Grenzfläche aus, auf der selbst keine Ströme fließen. Unter der Annahme, dass die Felder und ihre zeitlichen Ableitungen, an der Grenzfläche endlich sind, erhält man aus den Maxwell-Gleichungen folgende Stetigkeitsbedingung: ( $\vec{n}$  sei die Normale zur Grenzfläche)

- Die Tangentialkomponente von  $\vec{H}$  ändert sich beim Übergang nicht:  $\vec{n} \times \vec{H}_1 = \vec{n} \times \vec{H}_2$
- Die Normalkomponente von  $\vec{B}$  ändert sich beim Übergang nicht:  $\vec{n} \cdot \vec{B}_1 = \vec{n} \cdot \vec{B}_2$
- Die jeweils anderen Komponenten ändern sich unstetig, wenn  $\mu_r$  verschieden ist.

Auf Grund der Änderung je einer der Komponenten der Feldvektoren ändert sich auch die Richtung dieser. Für die Winkel  $\alpha_i = \angle(\vec{H}_i, \vec{n}) = \angle(\vec{B}_i, \vec{n})$ , die die Feldvektoren mit der Normalen einschließen, gilt:

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (11)$$

### 2.1.7 Kraft auf stromdurchflossenen Leiter im magnetischen Feld

Geladene Teilchen erfahren im magnetischen Feld nur dann eine Kraft, wenn sie sich bewegen. Die Kraft wirkt senkrecht zur Teilchengeschwindigkeit  $\vec{v}$  und heißt Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (12)$$

Folglich wirkt auch auf ein mit dem Strom  $I = -envA$ , d.h. der Stromdichte  $\vec{j} = -en\vec{v}$ , durchflossenes Leiterstück im Magnetfeld eine Kraft, die Summe der Lorentz-Kräfte

$$\vec{F} = lA \cdot (-en\vec{v}) \times \vec{B} = I\vec{l} \times \vec{B} \quad (13)$$

wobei der Betrag des Vektors  $\vec{l}$  die Länge des Leiterstücks und seine Richtung die Richtung der Elektronen angibt.

Man sieht, dass bei einer Leiterschleife sich die Anteile von parallelen, aber entgegengesetzt durchflossenen Leiterstücken aufheben, wenn das Magnetfeld homogen ist.

## 2.2 Elektromagnete

Elektromagnete sind stromdurchflossene Leiter. Üblicherweise bestehen sie aus einer Spule mit Eisenkern.

### 2.2.1 Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule

Eine ausreichend lange stromdurchflossene Spule erzeugt in ihrem Inneren ein nahezu homogenes Magnetfeld der Stärke

$$H = \frac{nI}{l} \quad (14)$$

wobei  $I$  die Stromstärke,  $n$  die Anzahl der Windungen und  $l$  die Länge der Spule ist.  $\vec{H}$  ist der Spulen-Achse parallel.

### 2.2.2 mit ferromagnetischem Kern

Das  $\vec{B}$ -Feld einer solchen Spule ist proportional  $\mu_r$ , also besonders groß, wenn das Innere der Spule ein Ferromagnet wie Eisen ist.

Das  $\vec{B}$ -Feld verläuft so weit wie möglich im Eisenkern, da dies wegen  $W_{\text{mag}} \sim \frac{1}{\mu_r}$  energetisch günstig ist.

### 2.2.3 Ringspule mit Luftspalt

Bei dem Typ von Elektromagnet, der im Versuch verwendet wird, handelt es sich um eine Ringspule mit ferromagnetischem Kern, wobei der Eisenkern an einer Stelle einen Luftspalt, Interferrikum genannt, der Breite  $d$  hat. (Der Kern braucht hierzu keine Ähnlichkeit mit einem Kreisring zu haben, so lange der Kern, bis auf den Spalt, geschlossen ist; siehe auch Abb. 1)

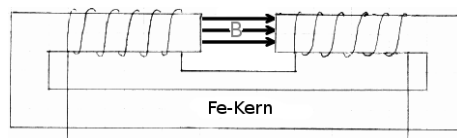


Abbildung 1: Elektromagnet

Da das  $\vec{B}$ -Feld quellenfrei<sup>1</sup> ist, muss die gesamte aus der einen Seite des Kernes austretende  $\vec{B}$ -Feldstärke auf der anderen Seite wieder in der Kern eintreten. Wegen der Stetigkeit der Normalkomponente des  $\vec{B}$ -Feldes, geht die Komponente, die senkrecht auf den Grenzflächen (Stirnflächen des Kernes) steht, unverändert durch den Spalt hindurch.<sup>2</sup> Da das  $\vec{B}$ -Feld im Inneren einer Spule achsenparallel ist und der gesamte Kern (jedenfalls in der Nähe der Grenzflächen) von der Spule umschlossen ist, gibt es keinen weiteren Komponenten.<sup>3</sup>  $\vec{B}$  im Luftspalt ist also gleich dem im Eisenkern.

Nach (8) ist mit dem Weg im Eisen  $l$  und der Spaltbreite  $d$

$$H_{\text{Eisen}}l + H_{\text{Luft}}d = N_{\text{mag}}I_{\text{mag}} \quad (15)$$

und mit (9) folgt

$$B = \mu_0 H_{\text{Luft}} = \frac{\mu_0 N_{\text{mag}} I_{\text{mag}}}{d + l\mu_r} \quad (16)$$

Ist nun  $d \ll \frac{l}{\mu_r}$ , so ist:

$$B = \frac{\mu_0 \mu_r N_{\text{mag}} I_{\text{mag}}}{l} \quad (17)$$

$B$  ist also (auch im Luftspalt) durch den Eisenkern um den Faktor  $\mu_r$  verstärkt. Ist jedoch  $d \gg \frac{l}{\mu_r}$ , so gilt

$$B = \frac{\mu_0 N_{\text{mag}} I_{\text{mag}}}{l} \quad (18)$$

<sup>1</sup>Maxwell:  $\text{div } \vec{B} = 0$

<sup>2</sup>Wir setzen voraus, dass die beiden Grenzflächen zueinander parallel und zur Spulenachse (zumindest lokal) orthogonal sind.

<sup>3</sup>Diese Begründung mag etwas unbefriedigend erscheinen, lässt sich jedoch experimentell bestätigen: Man misst kein Magnetfeld, das seitlich aus dem Spalt herausquillt.

d.h. das  $\vec{B}$ -Feld ist so groß wie bei einer Spule der Länge  $d < l$  mit derselben Anzahl Windungen. Auch das bedeutet eine Verstärkung.

## 2.3 Fragen

### 2.3.1 Vernachlässigung von $R_{\text{Fe}}$ gegenüber $R_{\text{Luft}}$

Die Vernachlässigung des magnetischen Widerstandes des Eisenkerns entspricht der Näherung (18). Diese Gleichung hatten wir hergeleitet, ohne die magnetischen Widerstände zu formulieren, weshalb diese hier nachgereicht seien:

$$R_{\text{mag}} = \frac{l}{\mu_r \mu_0 A} \quad ,$$

wobei  $A$  die Querschnittsfläche ist. Diese Beziehung folgt direkt aus der Definition in 2.1.1. Man sieht

$$R_{\text{Eisen}} \ll R_{\text{Luft}} \quad \text{für} \quad \mu_{\text{Eisen}} \gg \mu_{\text{Luft}}$$

### 2.3.2 Lineare Abhängigkeit des $\vec{B}$ -Feldes von $I_{\text{mag}}$

Das  $\vec{H}$ -Feld ist der Stromstärke proportional. Wie in 2.1.4 dargestellt ist die Abhängigkeit  $\vec{B}$  von  $\vec{H}$  jedoch nicht-linear. Üblicherweise verwendet man bei Elektromagneten ferromagnetisch weiche Kerne, bei denen der Effekt vernachlässigbar ist.

### 2.3.3 (für Physiker und fleisige Biologen) em-Felder an Grenzflächen

Die Stetigkeit der magnetischen Felder an Grenzflächen wurde in 2.1.6 diskutiert. Bei den Feldern  $\vec{E}$  und  $\vec{D}$  gilt:

- Die Tangentialkomponente von  $\vec{E}$  ändert sich beim Übergang nicht.
- Die Normalkomponente von  $\vec{D}$  ändert sich beim Übergang nicht.

Es bleibt dem Betreuer überlassen, die offensichtliche Analogie festzustellen.

## 3 Durchführung

Wir verwenden einen Elektromagneten, bestehend aus einem Eisenkern und zwei Spulen  $N_{\text{mag}} = 2 \cdot 3000$  Windungen. Der Strom  $I_{\text{mag}}$  durch diese Spulen lässt sich regeln. Der Eisenkern ist nicht geschlossen, er hat einen Luftspalt zwischen zwei Polschuhen, dessen Abstand  $d$  sich einstellen lässt. Zu dessen Einstellung stehen Abstandshalter definierter Größe zur Verfügung.

Im Luftspalt befindet sich eine Rechteckspule mit  $n_{\text{Spule}} = 20$  an einer Gleichspannungsquelle. Der Strom  $I_{\text{Spule}}$  wird durch einen Schiebewiderstand begrenzt und von einem digitalen Multimeter gemessen. Eine der beiden horizontalen Seiten (Länge  $l = 0.05$  m) der Spule befindet sich hierbei zwischen den Polschuhen, die andere ist weit davon entfernt.

Die Spule hängt an einer Seite einer Balkenwaage. Mit Hilfe von Gewichten, die auf die andere Seite der Waage gelegt werden, bestimmen wir die Kraft, die die Spule auf die Waage ausübt, das ist die Kraft, die die untere horizontale Seite im Magnetfeld erfährt.

Zunächst messen wir bei konstantem Magnetfeld (d.h. konstantem  $I_{\text{mag}}$  und  $d$ ) die Kraft auf die Spule für verschiedene Werte von  $I_{\text{Spule}}$

Im zweiten Teil des Versuchs bestimmen wir die Kraft auf die Spule bei festem  $I_{\text{Spule}}$  für verschiedene Magnetfeldstärken. Hierzu messen wir bei verschiedenen Werten für  $d$  und  $I_{\text{mag}}$ .

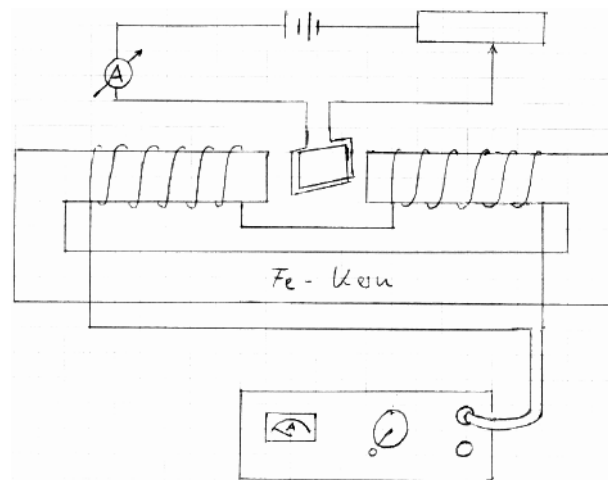


Abbildung 2: zu 3: Versuchsaufbau

## 4 Auswertung und Fehlerbetrachtung

Die Fehlerrechnung ist Bestandteil dieses Abschnittes.

### 4.1 Kraft auf Leiter im B-Feld

Die Kraft auf die Spule im homogenen Feld des Elektromagneten wurde in Abhängigkeit des Stromes  $I_{\text{Spule}}$  durch die Spule gemessen. Für den Fehler der Strommessung nehmen wir  $\pm 0.05$  A an, da die Werte am Messgerät in dieser Größenordnung schwankten. Bei der Kraftmessung gehen wir von einem Fehler von  $\pm 0.0137$  N aus, da das kleinste uns zur Verfügung stehende Gewichtsstück eine Masse von 1.4 g hatte (umgerechnet mit dem Faktor  $g = 9.81$  N/kg für die Gravitationsbeschleunigung).

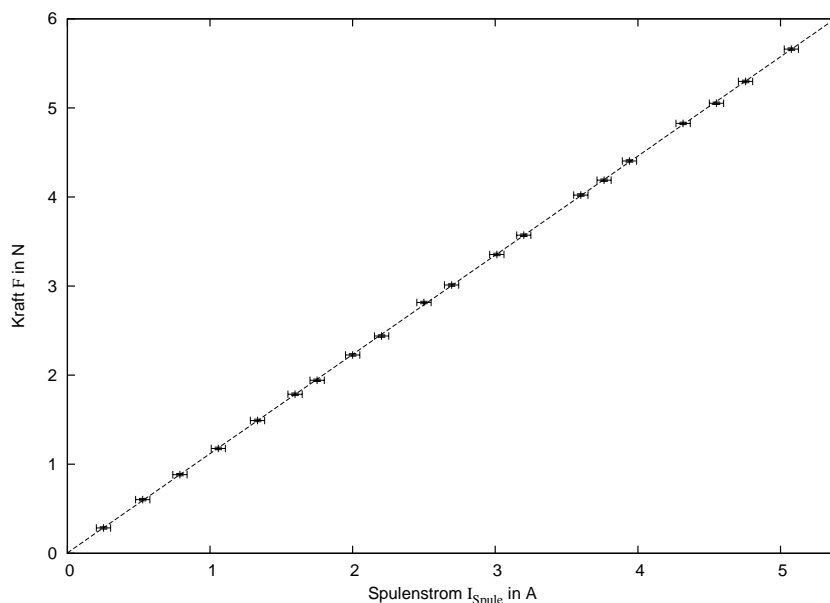


Abbildung 3: zu 4.1: Kraft als Funktion des Spulenstroms

Auf Grund der Theorie erwarten wir einen linearen Zusammenhang und berechnen daher eine Ausgleichs-

gerade, die unsere Messwerte im Rahmen der obigen Fehlerabschätzung bestätigen:

$$F(I_{\text{Spule}}) = aI_{\text{Spule}} + b \quad \text{mit } a = (1.11385 \pm 0.00177) \text{ N/A}$$

$$\text{und } b = (0.00464 \pm 0.00533) \text{ N}$$

Die Messdaten können Abbildung 3 oder dem angehängten Messprotokoll entnommen werden.

## 4.2 B-Feld des Elektromagneten

Das Feld des Elektromagneten wurde nun mit Hilfe der Spule ( $I_{\text{Spule}} = (1.0018 \pm 0.0034) \text{ A}$ ) (Mittelwert über den gesamten Messzeitraum und Standardabweichung;  $n_{\text{Spule}} = 20$ ,  $l = 0.05 \text{ m}$ ) wie oben ausgemessen.

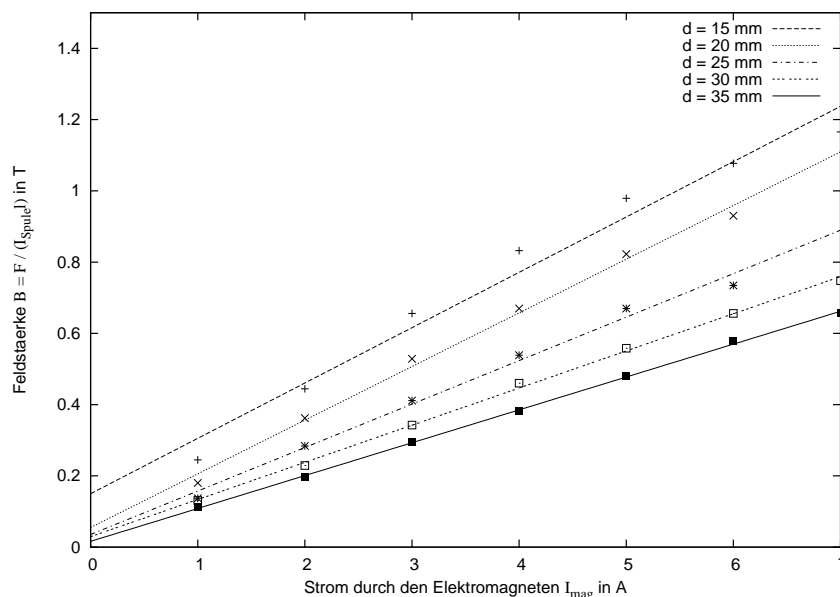


Abbildung 4: zu 4.2: Feldstärke als Funktion des Stroms durch den Magneten

Für verschiedene Werte der Spaltbreite  $d$  tragen wir in Abbildung 4 die Feldstärke in Abhängigkeit des Stroms  $I_{\text{mag}}$  durch die Spule des Elektromagneten auf. Da wir einen linearen Zusammenhang erwarten, berechnen wir wieder Ausgleichsgeraden.

Die Werte für große Spaltbreiten geben die erwartete Linearität gut wieder, bei den kleinen Spaltbreiten meint man, eine nicht-lineare Abhängigkeit zu erkennen. Einzelne Messwerte weichen bis zu 20% von der Ausgleichsgerade ab. Die theoretische Steigung der Funktion  $B(I_{\text{mag}})$  ist  $\frac{F}{I_{\text{Spule}} I_{\text{mag}}}$  proportional. Gemäß Fehlerfortpflanzung addieren sich die relativen Fehler. Sowohl bei der Kraftbestimmung mit den Massestücken als auch bei  $I_{\text{mag}}$  ist ein Fehler in der Größenordnung von 10% durchaus wahrscheinlich.  $I_{\text{mag}}$  wurde auf einer Skala mit Skalenteilen von 0.2 A abgelesen!

Es fällt auf, dass vier der Geraden sich in der Nähe des Ursprungs schneiden. Der  $y$ -Achsenabschnitt für  $d = 15 \text{ mm}$  weicht deutlich davon ab, was auf einen Messfehler bei dieser Messung hinweist.

Analog gewinnt man aus den Daten für ausgewählte Werte von  $I_{\text{mag}}$  die Feldstärke in Abhängigkeit der Spaltbreite  $d$ , was in Abbildung 5 dargestellt ist. Auf Grund der Theorie erwarten wir hier eine lineare Abhängigkeit von  $d^{-1}$ , was die berechnete und in der Grafik eingezeichnete Gerade auf den ersten Blick bestätigt.

Die Abweichungen von etwa 5% einzelner Messwerte von dieser Gerade, lassen sich durch den Fehler der Kraftbestimmung erklären.

Auf eine tabellarische Darstellung der Messwerte sei verzichtet, sie lassen sich dem angehängten Messprotokoll entnehmen.

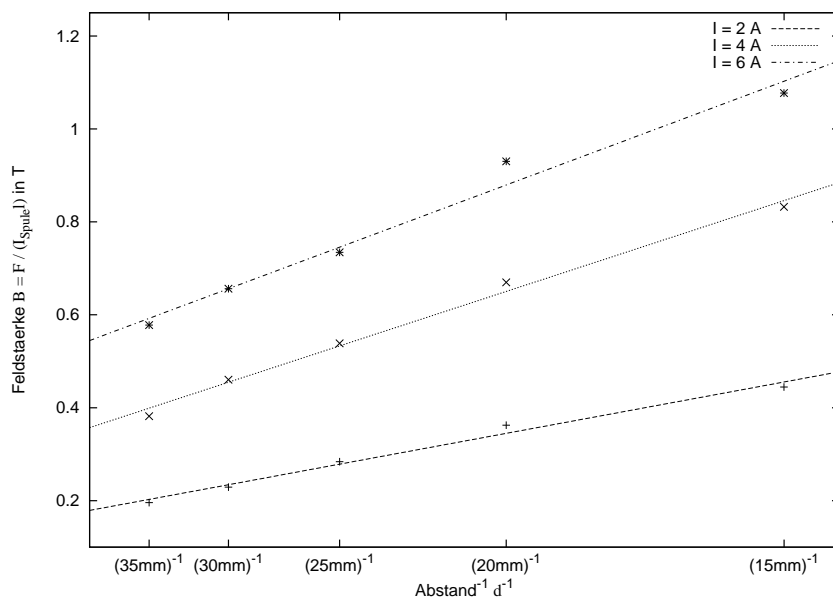


Abbildung 5: zu 4.2: Feldstärke als Funktion der reziproken Spaltbreite

### 4.3 Ermittlung der Feldkonstanten $\mu_0$

Aus den Werten aus Abschnitt 4.2 lässt sich mit Hilfe von (18)  $\mu_0$  berechnen. Wir erhalten Werte zwischen  $7.81 \cdot 10^{-7}$  und  $2.04 \cdot 10^{-6}$  V s/A m, berechnen den Mittelwert aus allen 33 Messungen und die

Standardabweichung des Mittelwertes nach  $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$ :

$$\mu_0 = (1.202 \pm 0.061) \cdot 10^{-6} \text{ V s/A m}$$

Der Literaturwert (1) liegt gerade noch im Rahmen dieser Fehlerabschätzung. Eine Abweichung von 4.3% vom Literaturwert ist für einen AP-Versuch ein gutes Ergebnis.

### 4.4 Fehlerquellen

- $I_{\text{mag}}$  musste auf einer analogen Skala mit Skalenteilen von 0.2 A abgelesen werden. Ein Spiegel zur Vermeidung von Paralaxenfehlern fehlte.
- Der durch den Schiebewiderstand eingestellte Strom  $I_{\text{Spule}}$  schwankte deutlich. Bei starken Schwankungen haben wir die Messung wiederholt, wir müssen dennoch von einem erheblichen Fehler ausgehen.
- Die Kraftmessung per Balkenwaage ist fehlerbehaftet, insbesondere da keine kleinen Gewichtsstücke verwendet wurden. Außerdem war die Waage nicht perfekt austariert.
- Der Einfluss der Hysteresekurve des Eisenkerns auf die  $\vec{B}$ -Feldstärke lässt sich schwer abschätzen, da sie nicht bestimmt wurde.
- Die Fehler der gegebenen Größen  $d$ ,  $l$  sind nicht bekannt.

## A Literatur

- Horst Stöcker: Taschenbuch der Physik  
5. Auflage, 2004, Verlag Harri Deutsch



- Dieter Meschede: Gerthsen – Physik  
21. Auflage, 2002, Springer
- Wikipedia, die freie Enzyklopädie  
<http://de.wikipedia.org>