

Physikalisches Anfängerpraktikum  
an der Universität Konstanz:

**Elektrischer Schwingkreis**

Experiment durchgeführt am 11.01.2005

Jan Korger, Studiengang Physik-Diplom  
Thomas Wurth, Studiengang Physik-Diplom

## 1 Einleitung

Der elektrische Schwingkreis ist ein System, welches wie der bekannte Pohl'sche Resonator mit dem heißgeliebten Modell des (gedämpften) harmonischen Oszillators beschrieben werden kann. Der harmonischen Oszillator ist eines der wenigen Systeme, die sich exakt berechnen lassen, und eignet sich unter anderem auch zur Erklärung optischer Phänomene.

## 2 Theorie

### 2.1 elektrischer Widerstände im Gleich- und Wechselstromkreis

#### 2.1.1 Ohm'scher Widerstand oder Wirkwiderstand

Legt man zwischen zwei Punkten eines Leiters eine konstante Gleichspannung  $U$  an, so fließt ein Strom, dessen Stärke  $I$  vom Widerstand  $R$  abhängt. Ist

$$R = \frac{U}{I} = \text{const} \quad (1)$$

spricht man von einem Ohm'schen Widerstand.

Unter einer sinusförmigen Wechselspannung<sup>1</sup> der Frequenz  $\omega$  verhält sich ein Ohm'scher Widerstand entsprechend:

$$U(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{\hat{U}}{R} \cdot \sin(\omega t) \quad (2)$$

Für die Leistung im Zeitmittel erhält man:

$$\bar{P} = \langle P(t) \rangle = \frac{\hat{U}^2}{R} \cdot \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{\hat{U}^2}{2R} \quad (3)$$

$$= \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{U}}{R\sqrt{2}} := U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \quad (4)$$

$U_{\text{eff}}$  und  $I_{\text{eff}}$  nennt man Effektivwerte der Wechselspannung bzw. des Wechselstroms.

---

<sup>1</sup>Wir betrachten im Folgenden stets Sinus-Spannungen, wenn von Wechselspannung bzw. -strom die Rede ist.

### 2.1.2 Kondensator bzw. kapazitiver Widerstand

Im Gleichstromkreis stellt ein Kondensator lediglich eine Unterbrechung dar und macht sich, wenn man von Ein- bzw. Ausschaltvorgängen, d.h. von Lade bzw. Entladevorgängen absieht, nicht bemerkbar.

Unter einer Sinus-Spannung ist der Strom am Kondensator auch sinusförmig, da die Ladung am Kondensator (mit der Kapazität  $C$ ) der Spannung proportional ist:

$$Q(t) = C \cdot U(t) = C\hat{U} \cdot \sin(\omega t) \quad (5)$$

$$\Rightarrow I(t) = \dot{Q}(t) = C\hat{U}\omega \cdot \cos(\omega t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (6)$$

Man sieht, die Phasenverschiebung beträgt  $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ ; der Strom eilt der Spannung voraus.

Die Leistung im Zeitmittel ist hier:

$$\bar{P} = C\hat{U}^2 \cdot \langle \sin(\omega t) \cos(\omega t) \rangle = 0 \quad (7)$$

Analog zu (1) definiert man den *kapazitiven Blindwiderstand*  $X_C$  und verwendet aus (6)  $\hat{I} = \hat{U} \cdot C\omega$ :

$$X_C = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{1}{\omega C} \quad (8)$$

### 2.1.3 Spule bzw. induktiver Widerstand

Auch eine Spule, deren Ohm'scher Widerstand  $\approx 0$  sei, ist im Gleichstromkreis nicht sonderlich spannend, d.h. von Ein-/Ausschaltvorgängen abgesehen, lediglich ein widerstandloser Leiter.

Bei Wechselstrom fällt an der einer Spule mit der Induktivität  $L$  gemäß Induktionsgesetz die Spannung  $-L \cdot \dot{I}(t)$  ab, d.h. die Spannung

$$U(t) = L \cdot \dot{I}(t) \quad (9)$$

liegt an der Spule an. Durch Einsetzen bestätigt man, dass für  $U(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$  gelten muss:

$$I(t) = -\frac{1}{\omega L} \cdot \cos(\omega t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (10)$$

Hier eilt also die Spannung dem Strom voraus. Die Phasenverschiebung beträgt  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ . Die Leistung im Zeitmittel ist wieder 0. Den Blindwiderstand berechnet man zu:

$$X_L = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \omega L \quad (11)$$

### 2.1.4 Scheinwiderstand und komplexe Widerstandsebene

Im Allgemeinen bezeichnet man den Quotient

$$Z = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \quad (12)$$

im Wechselstromkreis als Scheinwiderstand<sup>2</sup>. Er setzt sich aus dem Ohm'schen Widerstand und den Blindwiderständen zusammen.

Es empfiehlt sich hier eine komplexe Schreibweise<sup>3</sup> einzuführen:

$$\vec{U}(t) = \hat{U} \cdot e^{i\omega t} \quad (13)$$

$$\vec{I}(t) = \hat{I} \cdot e^{i\omega t + \varphi} \quad (14)$$

$$\vec{Z} = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \cdot e^{-i\varphi} \quad (15)$$

<sup>2</sup>auch: Impedanz

<sup>3</sup>An Stelle der komplexen Zahlen verwendet man auch Zeiger, die um den Nullpunkt in einer Ebene rotieren, um harmonische Schwingungen zu beschreiben, wobei man den Sinus als Projektion auf eine der Koordinatenachsen erhält. Ich kennzeichne die komplexen Größen daher mit Vektorpfeilen.

Die tatsächlichen Größen  $U(t)$ ,  $I(t)$  und  $Z$  erhält man als Realteil der komplexen Größen. Betrachtet man die drei oben genannten Fälle sieht man:

| Widerstand   | $\varphi$        | $\vec{Z}$              |
|--------------|------------------|------------------------|
| Ohm'scher    | 0                | $R$                    |
| Kapazität    | $+\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{1}{\omega C}i$ |
| Induktivität | $-\frac{\pi}{2}$ | $+\omega L i$          |

Daraus folgt für die Stromstärke in komplexer Schreibweise

$$\vec{I}(t) = \frac{\vec{U}(t)}{\vec{Z}} = \frac{\hat{U}}{\vec{Z}} \cdot e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (16)$$

$$\text{mit: } Z = |\vec{Z}| \quad (17)$$

$$\text{und: } \varphi = -\arg \vec{Z} \quad (18)$$

Die komplexe Größe  $\vec{Z}$  bzw. die reellen Größen  $Z$  und  $\varphi$  erlauben aus bekannter Spannung  $U(t)$  die Stromstärke  $I(t)$  (und andersherum) zu berechnen.

### 2.1.5 Reihenschaltung von Widerständen

Um Scheinwiderstand und Phasenverschiebung von Schaltungen, in denen Wirk- sowie Blindwiderstände auftreten, allgemein berechnen zu können, betrachtet man eine Reihenschaltung aus Ohm'schem Widerstand  $R$ , Kondensator  $C$  und Kapazität  $L$ .<sup>4</sup>

Nach der Kirchhoff'schen Maschenregel ist die Summe der Spannung in einem geschlossenen Kreis (Stromquelle  $-U_0(t)$ , Ohm'scher Widerstand  $R$ , Kondensator  $C$ , Spule  $L$ ) stets 0. Als Sonderfall der Kirchhoff'schen Knotenregel erhält man, dass der Strom  $I(t)$  durch alle Bauteile gleich ist. Mit der oben eingeführten komplexen Schreibweise erhält man die allgemeine Form des Scheinwiderstandes  $\vec{Z}$ :

$$\vec{U}_0(t) = \vec{U}_R(t) + \vec{U}_C(t) + \vec{U}_L(t) \quad (19)$$

$$= R \cdot I(t) - \frac{1}{\omega C} i \cdot I(t) + \omega L i \cdot I(t) = \left( R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right) \cdot I(t)$$

$$\Rightarrow \vec{Z} = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (20)$$

$$\Leftrightarrow Z = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (21)$$

$$\varphi = -\arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (22)$$

Da  $Z$  frequenzabhängig ist, ist auch die Stromstärke einer solchen Schaltung frequenzabhängig und hat ihr Maximum bei der Frequenz, für die  $Z$  sein Minimum annimmt.  $Z$  ist minimal für:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Leftrightarrow \omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (23)$$

In diesem Fall ist  $\varphi = 0$  und für jedes  $t$  gilt  $U_C(t) = -U_L(t)$ . Da hier der Strom ein Maximum erreicht nennt man  $\omega_r$  *Stromresonanzfrequenz*.

<sup>4</sup>Dies ist sinnvoll und notwendig, da vor allem reale Spulen (die nicht supraleitend sind) stets einen Wirkwiderstand, der Widerstand des Spulendrahtes, haben. Eine reale Spule, die durch  $L$  und  $R$  charakterisiert ist, verhält sich wie eine Reihenschaltung aus idealer Spule  $L$  und Ohm'schen Widerstand  $R$ .

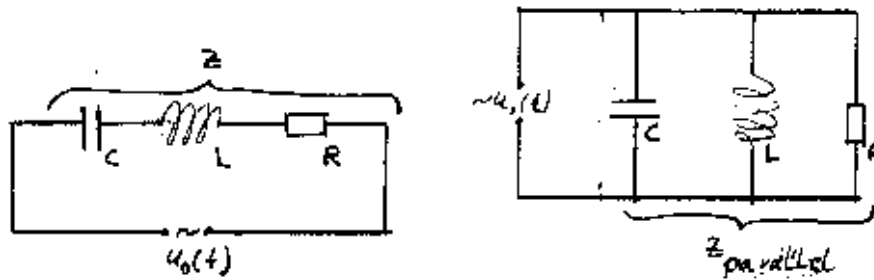


Abbildung 1: Reihen- und Parallelschaltung von Scheinwiderständen

### 2.1.6 Parallelschaltung von Widerständen

Analog betrachtet man nun eine Parallelschaltung von  $R$ ,  $C$  und  $L$ . Hier ist die Spannung an allen Bauteilen gleich  $U_0(t)$ , die Stromstärke der Quelle  $I_0(t)$  ist die Summe der Stromstärken durch die Bauteile:

$$\vec{I}_0(t) = \vec{I}_R(t) + \vec{I}_C(t) + \vec{I}_L(t) = \frac{U_0(t)}{R} + \frac{U_0(t)}{-\frac{1}{\omega C}i} + \frac{U_0(t)}{\omega L i} \quad (24)$$

$$= \frac{U_0(t)}{R} + U_0(t) \cdot \omega C i - \frac{U_0(t)}{\omega L} i = U_0(t) \cdot \left( \frac{1}{R} + i \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right) \quad (25)$$

Die Größe

$$\vec{Y} = \frac{1}{R} + i \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} \cdot e^{i\psi} \quad (26)$$

$$\text{mit: } \psi = \arctan \left( \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \cdot R \right) \quad (27)$$

ist der Kehrwert des Scheinwiderstands  $\vec{Z} = Z \cdot e^{i\varphi}$  mit:

$$Z_{\text{parallel}} = |\vec{Z}_{\text{parallel}}| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}} \quad (28)$$

$$\varphi_{\text{parallel}} = -\psi = -\arctan \left( \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \cdot R \right) \quad (29)$$

Hier wird also die Phasenverschiebung wieder 0, wenn

$$\omega C = \frac{1}{\omega L} \Leftrightarrow \omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (30)$$

gilt. Für alle  $t$  gilt hier  $I_L(t) = -I_C(t)$

## 2.2 Feldenergie

### 2.2.1 ... einer Spule

Eine mit dem Strom  $I$  durchflossene Spule der Induktivität  $L$  speichert Energie in Form ihres Magnetfeldes:

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L \cdot I^2 \quad (31)$$

### 2.2.2 ... eines Kondensators

Ein Kondensator der Kapazität  $C$ , der mit der Spannung  $U$  geladen wurde, so dass er die Ladung  $Q$  trägt, speichert Energie in Form seines elektrischen Feldes:

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} C \cdot U^2 \quad (32)$$

## 2.3 Oszilloskop

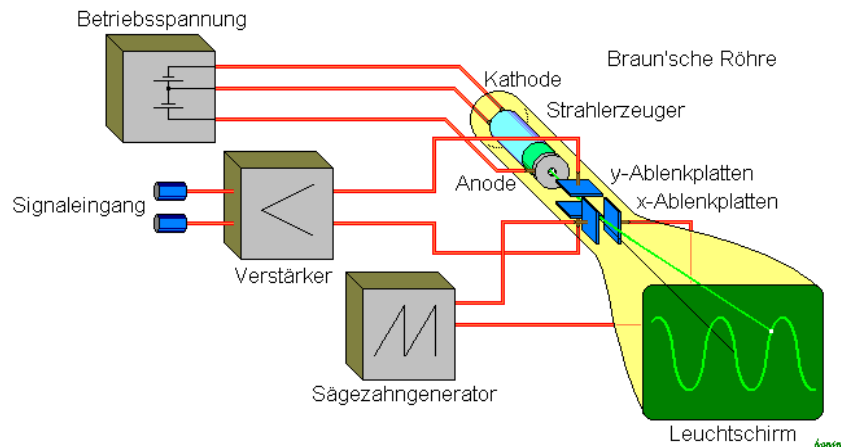


Abbildung 2: Analoges Oszilloskop (Quelle: Wikipedia-Grafik, GNU FDL)

Ein Oszilloskop ist ein elektrisches Messgerät, das den zeitlichen Verlauf einer Spannung aus einem Bildschirm darstellt. Gute Oszilloskope können auch hochfrequente Spannungsverläufe darstellen. Bei analogen Oszilloskopen handelt es sich um Braun'schen Röhren, deren Elektronenstrahl von zwei Plattenpaaren abgelenkt wird, siehe Abbildung 2. Heutzutage verwendet man meist digitale Speicheroszilloskope.

## 2.4 Schwingkreis

### 2.4.1 Kondensator und Spule als schwingungsfähiges System

Entlädt man einen Kondensator über eine Spule, so induziert der Entladestrom, der durch die Spule fließt, dort ein Magnetfeld; die elektrische Feldenergie des Kondensators wird in magnetische Feldenergie der Spule umgewandelt. Der Strom bricht jedoch nicht ab, wenn Kondensator vollständig entladen ist, da eine Änderung der Stromstärke in der Spule eine Spannung  $U = -L \cdot \dot{I}$  erzeugt, die gemäß Lenz'scher Regel der Ursache entgegen wirkt. Die Ursache ist hier die Abnahme des Stromes, d.h. die induzierte Spannung verursacht einen Strom in dieselbe Richtung wie der Entladestrom. Der Kondensator wird wieder (mit umgekehrter Polarität) geladen und das Spielchen wiederholt sich.

Bei diesem Vorgang (an idealierter Spule und Kondensator, die widerstandsfrei verbunden sind) geht keine Energie verloren, es handelt sich um eine ungedämpfte Schwingung. Schaltet man einen zusätzlichen Ohm'schen Widerstand in Reihe (oder betrachtet man den inneren Wirkwiderstand der Spule) ist das System gedämpft. Elektrische Energie wird am Ohm'schen Widerstand in Wärme umgewandelt.

### 2.4.2 Herleitung der freien Schwingungsgleichung

In einer Reihenschaltung von  $R$ ,  $C$  und  $L$  ist nach Kirchhoff die Summe der Momentanstromstärken 0, so dass man mit Induktionsgesetz, Spannungsabfall am Ohm'schen Widerstand und Ladung des Kondensa-

tors erhält:

$$U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = 0 \quad (33)$$

$$\Leftrightarrow L \cdot \ddot{Q}(t) + R \cdot \dot{Q}(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = 0 \quad (34)$$

Das ist eine homogene Differentialgleichung 2. Ordnung, die oft mit  $2\beta = \frac{R}{L}$  und  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  umgeschrieben wird:

$$\ddot{Q}(t) + 2\beta \cdot \dot{Q}(t) + \omega_0^2 \cdot Q(t) = 0 \quad (35)$$

Es handelt sich um die bekannte Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators, die wir in 2.5 diskutieren. Man nennt  $\beta$  Dämpfungskonstante,  $\omega_0$  Eigenfrequenz.

Wegen  $Q = CU_C$  lässt sich (35) schreiben als:

$$\ddot{U}_C(t) + 2\beta \cdot \dot{U}_C(t) + \omega_0^2 \cdot U_C(t) = 0 \quad (36)$$

### 2.4.3 Herleitung der angeregten Schwingungsgleichung

Legt man jedoch eine Erregerspannung  $U_{\text{err}}(t) = \text{Re} \{U_0 \cdot e^{-i\omega_{\text{err}}t}\}$  an, so ist die Summe der Teilspannungen in (33) nicht mehr Null, sondern  $U_{\text{err}}$ . Aus der homogenen Differentialgleichung (36) wird eine inhomogene:

$$\ddot{U}_C(t) + 2\beta \cdot \dot{U}_C(t) + \omega_0^2 \cdot U_C(t) = U_{\text{err}}(t) \cdot \omega_0^2 \quad (37)$$

Der Faktor  $\omega_0^2$  rührt vom Durchmultiplizieren der Gleichungen (34) und (35) mit den Faktoren  $L^{-1}$  und  $C^{-1}$  her.

## 2.5 harmonischer Oszillator

### 2.5.1 Lösung der freien Schwingungsgleichung

Bekanntermaßen löst der komplexe Ansatz  $Q_i(t) = e^{\lambda_i \cdot t}$  die Differentialgleichung (35). Man erhält durch Einsetzen die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (38)$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen:

$$\lambda_{1,2} = i\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (39)$$

Man hat also zwei linear unabhängige Lösungen  $Q_{1,2}$  gefunden, die (35) lösen; die Linearkombination beider (Koeffizienten  $\alpha_i$ ) stellt die allgemeine Lösung dar:

$$Q(t) = \alpha_1 \cdot e^{i\lambda_1 t} + \alpha_2 \cdot e^{i\lambda_2 t} = Q_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot e^{\pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} i t} \quad (40)$$

mit der Anfangsladung  $Q_0$ , einem Dämpfungsterm und einem periodischen Term. Die tatsächliche Ladung erhält man wieder als Realteil von (40).

Die Gleichungen für die Spannung (am Kondensator) und den Strom erhält man aus der bekannter Beziehungen  $U_C(t) = C^{-1} \cdot Q(t)$  sowie (trivialerweise)  $I(t) = \dot{Q}(t)$ .

Man teilt die möglichen Lösungen in drei Fälle ein, welche auch in Abbildung 3 veranschaulicht werden. Die Fälle werden charakterisiert durch die Größen  $\omega_0$  und  $\beta$ .

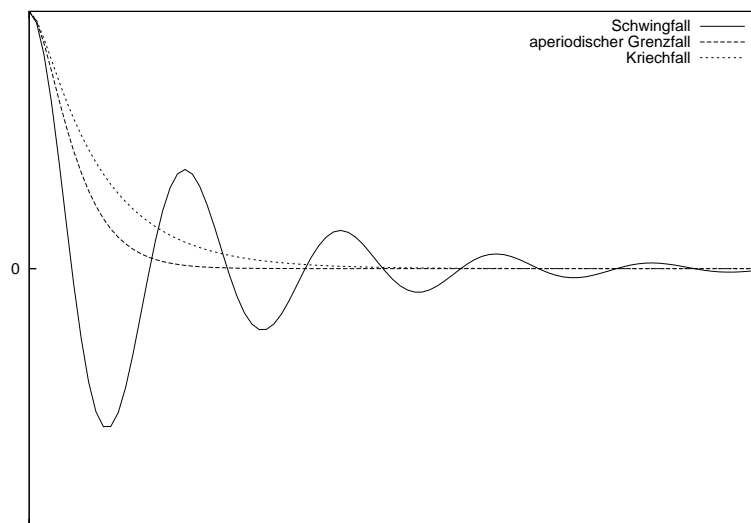


Abbildung 3: 3 Fälle einer gedämpften harmonischen Schwingung

### 2.5.2 Schwingfall $\omega_0 > \beta$

Ist die Wurzel

$$\omega_g = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (41)$$

rein reell, so erhalten wir als Realteil von (40) mit reellen Koeffizienten  $a$  und  $b$ :

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot (a \sin(\omega_g t) + b \cos(\omega_g t)) \quad (42)$$

(Sinus und Kosinus sind linear unabhängig, also stellt auch das die allgemeine Lösung dar.)

Man definiert noch das *logarithmische Dekrement* als das Verhältnis zweier aufeinander folgender Maximalausschläge

$$\Lambda = \ln \frac{\hat{Q}_n}{\hat{Q}_{n+1}} = \beta T_g = \beta \cdot \frac{2\pi}{\omega_g} \quad (43)$$

(42) lässt sich mit  $Q = CU_C$  auch schreiben als:

$$U_C(t) = U_{C0} \cdot e^{-\beta t} \cdot (a \sin(\omega_g t) + b \cos(\omega_g t)) \quad (44)$$

### 2.5.3 Kriechfall $\omega_0 < \beta$

Ist  $\omega_g$  rein imaginär, so ist  $e^{i\omega_g}$  rein reell. Dann haben wir den Fall, dass es keinen imaginären Anteil in der Schwingungsgleichung mehr gibt und damit auch keine Schwingung per se. Eine Lösung lautet:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} \quad (45)$$

### 2.5.4 aperiodischer Grenzfall $\omega_0 = \beta$

In der Mitte zwischen diesen beiden Fällen liegt der aperiodische Grenzfall, der immer dann eintritt, wenn die Wurzel  $\omega_g$  genau 0 ergibt. Hierbei finden gerade keine Schwingungen mehr statt (in manchen Fällen bleibt gerade ein "Unterschwinger", d.h. die Funktion hat maximal ein Nulldurchgang). Die Amplitude geht hier am schnellsten gegen 0, woraus die besondere technische Bedeutung des aperiodischen Grenzfalls folgt.

### 2.5.5 Lösung der angeregten Schwingungsgleichung

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (37) ist die Summe der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Dgl (36) und einer partikulären Lösung der inhomogenen Dgl. Die homogene Lösung ist  $U_C(t)$  aus (44), welche mit  $e^{-\beta t}$  abfällt, so dass nach dem sog. Einschwingvorgang nur noch die partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl bleibt.

Eine solche partikuläre Lösung ist:

$$U_C(t) = \vec{A} \cdot e^{-i\omega_{\text{err}} t} \quad (46)$$

mit der komplexen Amplituden  $\vec{A} = A \cdot e^{i\varphi}$ , die man wieder als Zeiger interpretieren kann, dessen Länge den Scheitelwert der Spannung am Kondensator  $U_{C0}$  und dessen Argument die Phasenverschiebung  $\varphi$  angibt. Durch Einsetzen in (37) findet man:

$$\vec{A} \cdot e^{-i\omega_{\text{err}} t} \cdot (\omega_{\text{err}}^2 - 2\beta i\omega_{\text{err}} + \omega_0^2) = U_0 \omega_0^2 \cdot e^{-i\omega_{\text{err}} t} \quad (47)$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{1}{\omega_{\text{err}}^2 - 2\beta i\omega_{\text{err}} + \omega_0^2} \cdot U_0 \omega_0^2 \quad (48)$$

Ganz analog zum Pohl'schen Resonator<sup>5</sup> erhält man:

$$\begin{aligned} U_{C0} = |\vec{A}| &= \sqrt{\text{Re}^2 \vec{A} + \text{Im}^2 \vec{A}} = U_0 \omega_0^2 \cdot \sqrt{\left( \frac{\omega_{\text{err}}^2 - \omega_0^2}{(\omega_{\text{err}}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega_{\text{err}}^2} \right)^2 + \left( \frac{2\beta \omega_{\text{err}}}{(\omega_{\text{err}}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega_{\text{err}}^2} \right)^2} \\ &= U_0 \omega_0^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{(\omega_{\text{err}}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega_{\text{err}}^2}} \end{aligned} \quad (49)$$

Mit der Phasenverschiebung:

$$\varphi = \arctan \frac{2\beta \omega_{\text{err}}}{\omega_0^2 - \omega_{\text{err}}^2} \quad (50)$$

### 2.5.6 Diskussion des Resonanzfalls

Desweiteren ist es interessant die Schwingung in Abhängigkeit der Frequenz zu diskutieren. Wir interessieren uns für die Frequenz der anregenden Schwingung, bei welcher die Amplitude maximal wird, also wann Resonanz eintritt. Hierzu betrachten wir ganz schulmäßig die erste Ableitung von (49):

$$\frac{\partial U_{C0}}{\partial \omega_{\text{err}}} = 0 \quad (51)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \omega_{\text{err}}} \left( (\omega_{\text{err}}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega_{\text{err}}^2 \right) = 0 \quad (52)$$

$$\Leftrightarrow 4(\omega_{\text{err}}^2 - \omega_0^2) \cdot \omega_{\text{err}} + 8\beta^2 \omega_{\text{err}} = 0 \quad (53)$$

$$\Leftrightarrow \omega_{\text{res}}(\beta) = \omega_{\text{err}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (54)$$

$\omega_{\text{res}}$  heißt Spannungsresonanzfrequenz. Sie ist abhängig von der Dämpfung, kleiner als  $\omega_g$  und damit auch kleiner als  $\omega_0$ .

Betrachtet man die Resonanzfrequenz, so sticht sie nicht nur dadurch hervor, dass hierbei die Amplitude maximal ist, sondern dass dies gerade bei der Phasenverschiebung  $\frac{\pi}{2}$  der Fall ist. Wäre das System nicht oder nur schwach gedämpft, so nehme es in jedem Zyklus mehr und mehr Energie auf, bis es zur sogenannten Resonanzkatastrophe (vergleiche mit dem allseits bekannten Beispiel der einstürzenden Brücke) kommen würde. Das Auftreten von starker Resonanz versucht man daher bei technischen Anwendungen so weit wie möglich zu unterbinden.

<sup>5</sup>Die sehr längliche Rechnung sei hier aus allgemeinen ökologischen und ökonomischen Überlegungen abgekürzt wiedergegeben



## 2.6 Anmerkung: Kreisfrequenz $\omega$ , Frequenz $f$ und Periodendauer $T$

Im Theorie-Teil tritt ausschließlich die Kreisfrequenz  $\omega$  auf, sie ergibt sich mit der Relation  $\omega = 2\pi \cdot f$  aus der üblicherweise im Experiment auftretenden Frequenz  $f$ . Letztere wiederum ist der Periodendauer reziprok.

## 3 Fragen und Aufgaben

### 3.1 Schwingungsdauer der gedämpften Schwingung

Aus  $\omega_g = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  folgt

$$T_g = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{2\pi T_0} - \beta}} \quad (55)$$

woraus man ableift, dass für ein ausreichend großes  $\beta$  die Periodendauer der gedämpften Schwingung signifikant größer als diejenige der ungedämpften ist, was sich am Oszilloskop ablesen lässt.

Die Dämpfungen, die in unserem Versuch aufgetreten sind, waren jedoch nicht groß genug, um den Unterschied am Oszilloskop erkennen zu können.

### 3.2 Spannungsresonanzmaximum $\omega_{\text{res}}$

siehe 2.5.6 (54)

### 3.3 Stromresonanzmaximum $\omega_r$

siehe 2.1.5 (23)

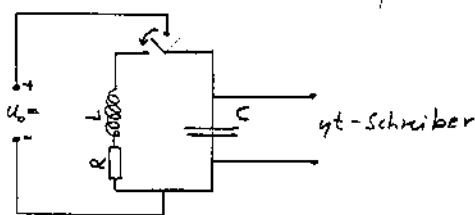
### 3.4 Warum muss die gegenseitige Induktivität der Spulen bei der induktiven Ankopplung klein sein gegenüber der Selbstinduktivität der Spule im Schwingkreis?

Eine zu hohe Gegeninduktivität bedeutet eine zu starke Kopplung zwischen Anregung und Schwingkreis. Ist die Kopplung (annähernd) starr, wird die anregende Bewegung dem Schwingkreis aufgezwungen. Man kann so die typischen Resonanzerscheinungen nicht beobachten, die Schwingung im Schwingkreis folgt dann einfach der anregenden Schwingung.

## 4 Experiment

### 4.1 Durchführung

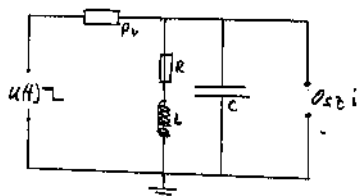
#### 4.1.1 gedämpfte Schwingung mit dem yt-Schreiber beobachtet



Wir verwenden einen Schwingkreis aus Drahtspule und Kondensator. Der Kondensator wird zunächst über ein Gleichspannungsnetzteil geladen, dann wird ein Schalter umgelegt, welcher die Spannungsquelle abtrennt und den Kondensator mit der Spule zum Schwingkreis verbindet.

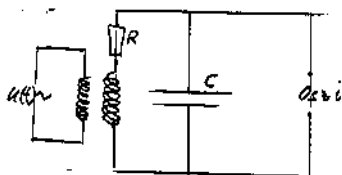
Die Schwingung wird mit einem yt-Schreiber, der die Spannung am Kondensator in Abhängigkeit der Zeit aufzeichnet, beobachtet.

#### 4.1.2 gedämpfte Schwingung mit dem Oszilloskop betrachtet



Wir verwenden einen ähnlichen Aufbau, erzeugen jedoch mit einem Funktionsgenerator eine Rechteckspannung, die den Kondensator periodisch lädt. Nach jedem Ladevorgang schwingt das System; die Schwingung beobachten wir mit dem Oszilloskop und bestimmen das Dämpfungsverhältnis  $k$  zweier aufeinander folgende Maximalausschläge.

#### 4.1.3 erzwungene Schwingungen



Die Spule im Schwingkreis wird nun schwach induktiv an eine weitere Spule gekoppelt. An der zweiten Spule legt man nun eine Sinus-Spannung an, die den Schwingkreis anregt.

Amplitude der Wechselfspannung am Kondensator und Phasenverschiebung zwischen der Spannung am Kondensator und der anregenden Spannung werden mit Hilfe des Oszilloskops in Abhängigkeit von  $R$  und  $f$  gemessen.

## 4.2 Auswertung und Fehlerbetrachtung

Fehlerrechnung und Fehlerdiskussion sind Bestandteile dieses Abschnittes!

#### 4.2.1 gedämpfte Schwingung mit dem yt-Schreiber beobachtet

Die Schreiber-Aufzeichnungen (Anhang) geben – auf den ersten Blick offensichtlich – gedämpfte harmonische Schwingungen wieder. Nulllage und Anfangsauslenkung lassen sich gut erkennen. Wir ermitteln die Periodendauer  $T$  an Hand der Abstände der Nulldurchgänge und berechnen die Frequenz  $f$ .

Die Spule hat (laut Aufschrift) eine Induktivität von  $L = 630 \text{ H}$  und den ohm'schen Widerstand  $R = 280 \Omega$ . Alle weiteren ohm'schen Widerstände werden vernachlässigt. Wir verwenden zunächst zwei parallelgeschaltete, dann einen Kondensator mit  $C = 20 \mu\text{F}$ . Das Netzteil liefert  $3.9 \text{ V}$ .

Theoretisch erhält man die Frequenz nach (41):

$$f = \frac{\omega_g}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (56)$$

| Kapazität $C$    | $T_{\text{Messung}}$ | $f_{\text{Messung}}$ | $f_{\text{Theorie}}$ | Fehler $\frac{\delta f}{f}$ |
|------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------------|
| 40 $\mu\text{F}$ | 0.94 s               | 1.06 Hz              | 1.00 Hz              | +6%                         |
| 20 $\mu\text{F}$ | 0.58 s               | 1.72 Hz              | 1.42 Hz              | +21%                        |

Der erste Wert liegt erstaunlich Nahe am theoretischen Wert, der zweite weicht deutlich ab. Leider konnten wir die Messung nicht wiederholen, um festzustellen, wie sehr die Werte statistisch schwanken. Keine der Größen  $R$ ,  $C$  und  $L$  wurde bestimmt und die Aufschrift enthält keinerlei Fehlerangabe. Fehler vom einigen Prozent sind bei solchen Bauteilen üblich, größere Abweichungen möglich; so dass der Fehler gerade noch im Rahmen der Fehlerabschätzung liegt.<sup>6</sup>

Außerdem lesen wir aus den Schreiberaufzeichnung je den ersten und den zweiten positiven Maximalauschlag<sup>7</sup> ab, woraus wir aus  $k = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}$  das logarithmische Dekrement  $\Lambda = \ln k = T_g \cdot \beta$  erhlten, so dass wir mit dem gemessenen  $T_g$  von oben  $\beta$  und schließlich den gesamten Ohm'schen Widerstand der Schaltung  $R_{\text{ges}}$  berechnen können:

| $C$              | $k$  | $\Lambda$ | $\beta$                | $R_{\text{ges}}$ |
|------------------|------|-----------|------------------------|------------------|
| 40 $\mu\text{F}$ | 2.40 | 0.875     | $0.931 \text{ s}^{-1}$ | 1174 $\Omega$    |
| 20 $\mu\text{F}$ | 2.64 | 0.972     | $1.676 \text{ s}^{-1}$ | 2111 $\Omega$    |

Erwartungsgemäß tritt hier wieder eine signifikante Diskrepanz zwischen den Werten beider Messungen auf. Offensichtlich war es falsch oben anzunehmen der gesamte Widerstand sei  $\approx 280 \Omega$ . Vielleicht ist die Angabe auch einfach falsch.

Abschließend bleibt uns festzustellen, dass, wenn uns bei der Messung kein grober Fehler unterlaufen ist, was sich jetzt nicht mehr überprüfen lässt, die beiden Kondensator alles andere als gleich sind.

#### 4.2.2 gedämpfte Schwingung mit dem Oszilloskop betrachtet

Mit den oben genannten Beziehungen erhält man aus den Messdaten (siehe angehängtes Messprotokoll) direkt  $k$ ,  $T$  und  $\beta$ . Aus der Periodendauer für  $R = 0$  (ungedämpfte Schwingung) berechnet man mit der bekannten Kapazität  $C = 0.01 \mu\text{F}$ :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \Leftrightarrow L = \frac{1}{C\omega_0^2} = \frac{T_0^2}{C(2\pi)^2} \quad (57)$$

Mit diesem Wert von  $L$  berechnen wir den Gesamtwiderstand der Schaltung:

| Vorwiderstand<br>[ $\Omega$ ] | Periodendauer<br>[ $\mu\text{s}$ ] | Dämpfungskonstante | Gesamtwiderstand<br>[ $\Omega$ ] | ohne Vorwiderstand<br>[ $\Omega$ ] |
|-------------------------------|------------------------------------|--------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| 0                             | 60.0                               | 8703               | 159                              | 159                                |
| 200                           | 61.0                               | 19388              | 354                              | 154                                |
| 400                           | 61.0                               | 30042              | 548                              | 148                                |
| 700                           | 63.5                               | 44147              | 805                              | 105                                |
| 100                           | 61.0                               | 17481              | 319                              | 219                                |

Man erwartet für den Gesamtwiderstand der Schaltung nach Abzug des vorgeschalteten Widerstandes stets den selben Wert, den Ohm'schen Widerstand von Spule und den Zuleitungen, zu erhalten. Die Schwankungen, die man oben abliest resultieren aus dem Messfehler (d.h. insbesondere aus Mess- und Ablesegenauigkeit des Oszilloskops) und dem Fehler des Wertes für den Vorwiderstand.

Wir berechnen Mittelwert (Gesamtwiderstand ohne Vorwiderstand) und dessen Standardabweichung

$$\text{gemäß } \sigma = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

$$R_{\text{Schaltung}} = 157 \pm 18 \Omega \quad (\pm 11.6\%) \quad (58)$$

<sup>6</sup>Auf die Darstellung der Formeln zur Fehlerrechnung sei hier wegen der ohnehin schon länglichen Auswertung verzichtet.

<sup>7</sup>Die folgenden Ausschläge sind so klein, dass ein Messung nicht sinnvoll erscheint.

Die ersten drei Werte weichen weniger als 6% vom Mittelwert ab. Solche Abweichung muss man bei billigen Widerständen tolerieren. Die Fehler könnten alleine von den Abweichungen der Vorwiderstände herrühren.

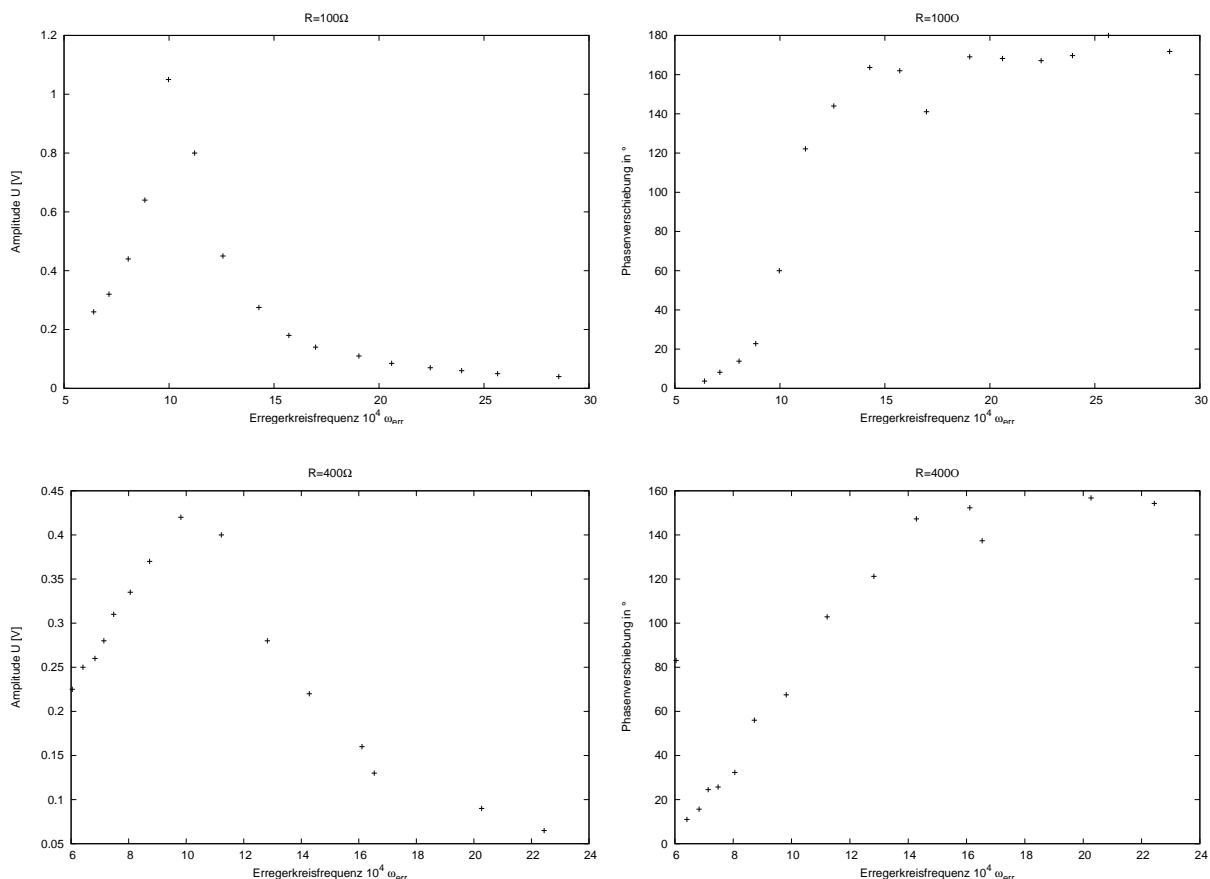
Bei den beiden letzten Werten sind es zwischen 30% und 40%, diese wollen wir genauer untersuchen: Der Fehler des Gesamtwiderstandes hängt maßgeblich vom Fehler der Dämpfungskonstante ab; deren Fehler wiederum ist bedingt durch die Ablesegenauigkeit der Spannungsamplituden. Am Oszilloskop kann man bestenfalls mit einer Genauigkeit von  $\pm 0.1$  div, d.h. einem halben Teilstrich, ablesen. Bei  $R = 700 \Omega$  haben wir für den zweiten Manimalausschlag 0.2 div abgelesen. Das bedeutet einen relativen Fehler von 50%, der auch durch die Fehlerfortpflanzung nicht kleiner wird, so dass unsere Ergebnis im Rahmen der Fehlerabschätzung in Ordnung ist.

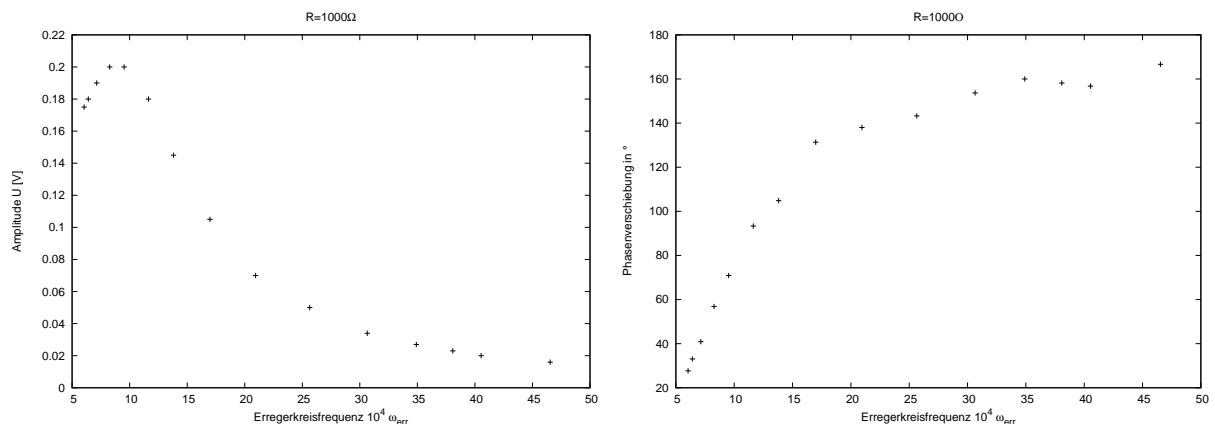
Die Werte bei  $R = 100 \Omega$  fallen aus dem Rahmen. Wir vermuten daher einen Messfehler, da die anderen Messungen Nahe legen, dass die Abweichungen der verwendeten Bauteile nicht so groß sind, dass sich damit im Rahmen der Fehlerfortpflanzung ein derart großer Fehler ergibt.

### 4.2.3 erzwungene Schwingungen

Alle Daten wurden direkt auf dem Oszilloskop abgelesen. Auf "digitale Spielereien" wurde hierbei verzichtet. Zur Bestimmung der Phasenverschiebung wurde das anregende Signal auf den zweiten Kanal gelegt und zwischen beiden Kanälen umgeschaltet. Die aufgezeichneten Messdaten stellen wir grafisch dar.

Wir verzichten bewusst auf einem Fit der Messwerte, da der Verlauf auch an Hand der aufgetragenen Punkte ersichtlich ist und der theoretisch Verlauf der Ressoanzkurven nicht bekannt ist.





Man sieht: Bei einer Phasenverschiebung von etwa  $90^\circ$  erreicht die Spannung ihr Maximum. Leider haben wir keine weiteren Messdaten, so dass wir diesen interessanten Bereich nicht genauer untersuchen können. Die Bestimmung der Phasenverschiebung scheint vor allem bei hohen Frequenzen fehlerbehaftet.

## A Literatur

- Bern-Uwe Runge: Versuchsanleitungen zum physikalischen Anfängerpraktikum  
<http://ap.physik.uni-konstanz.de/Anleitungen.html>
- Dieter Meschede: Gerthsen – Physik  
21. Auflage, 2002, Springer
- Wikipedia, die freie Enzyklopädie  
<http://de.wikipedia.org>