Protokoll zum physikalischen Anfängerpraktikum Gravitationswaage

Thomas Lauermann (547863), Physik Diplom, 2. Fachsemester
Jan Korger (561543), Physik Diplom, 2. Fachsemester

durchgeführt am 14.06.2004

1 Einleitung

Seit Sir Isaac Newton in seiner bahnbrechenden Arbeit die Theorie aufgestellt hatte, dass die Schwerkraft, die Körper auf der Erde erfahren, von denselben Ursachen hervorgerufen wird, die auch die Planetenbahnen auf Kurs halten. Das von ihm erstmals postulierte Gravitationsgesetz sagt aus, dass sich mit Masse behaftete Körper untereinander anziehen, und zwar proportional zum Produkt ihrer Massen und antiproportional zum Quadrat des Abstandes.

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \tag{1}$$

Damit konnte man erstmals die Kräfte zwischen zwei Körpern beschreiben, seien es nun Himmelskörper untereinander oder ein Apfel, der von der Erde angezogen wird – vorausgesetzt, man kennt die Proportionalitätskonstante Gamma. In der Tat war diese Proportionalitätskonstante lange Zeit unbekannt, da zu Newtons Zeiten niemand die Masse der Erde genau abschätzen konnte. Die experimentelle Bestimmung dieser Gravitationskonstante gelang indirekt erst 1798 durch das sogenannte Cavendish-Experiment, welches wir im Folgenden vorstellen möchten.

2 Theorie

2.1 Funktionsprinzip der Gravitationswaage

Mit der Gravitatioswaage ermittelt man die Kraft, die zwei massereiche Kugeln auf zwei drehbar aufgehängte Kugeln ausüben. Der Vorteil liegt auf der Hand, denn in diesem Versuch sind die Massen, welche die Kräfte hervorrufen, ausreichend genau bekannt. Dadurch, dass systematisch alle anderen Krafteinwirkungen ausgeschlossen werden – die Gravitation der Erde z.B dadurch, dass sich Bewegungen in der Ebene senkrecht zu deren Gravitationsfeld stattfinden – kann man davon ausgehen, dass die Beschleunigung der kleineren Kugeln von der Anziehungskraft der größeren Kugeln kommt. Da die Kugeln hantelförmig gelagert sind (siehe Abbildung), erzeugt diese Kraft ein Drehmoment:

$$M = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{b^2} \cdot 2d \tag{2}$$

Den jeweiligen Auslenkungswinkel ermittelt man am geschicktesten, indem man einen Laser auf einen an dem Hantelsystem befestigten Spiegel ausrichtet, so dass die Position des reflektierten Laserstrahls – dieser wird an die gegenüberliegende Wand projeziert – ein Maß für den Winkel darstellt.

$$2\varphi = \arctan \frac{x}{L} \tag{3}$$

wobei x hier die relative Position des reflektierten Laserstrahl auf der cm-Skala an der Wand ist.

2.2 Drehschwingungen

Die kleinen Kugeln sind an einem Torsionsfaden aufgehängt. Dies bedeutet, dass der Faden einer Verdrillung um einen Winkel φ ein Drehmoment proportional zu diesem Winkel entgegensetzt. Dieses auf die Kugeln ausgeübte Drehmoment liegt in der selben Größenordnung wie das, das durch die Gravitationskraft hervorgerufen wird, so dass sich Drehschwingungen ausbilden.

$$M_{Torsion} = D \cdot \frac{\varphi}{2} \tag{4}$$

Berücksichtigt man noch das Drehmoment, dass durch die Gravitation hervorgerufen wird, kann man eine Differentialgleichung für Drehschwingungen aufstellen:

$$\ddot{\varphi} + \frac{D}{J}\varphi = 0 \tag{5}$$

mit J als Trägheitsmoment der beiden beweglichen Kugeln.

$$J = 2m_1d^2 \tag{6}$$

Aus dieser Differentialgleichung lässt sich (mit dem Ansatz $\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \sin(\omega t)$) die Periodendauer der Drehschwingung als Funktion der Parameter angeben:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D}} \tag{7}$$

2.3 Berechnung der Gravitationskonstanten

Durch Gleichsetzen von (2) und (4) kommt man auf folgende Gleichung:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot 2dm_1 \cdot \frac{\varphi}{2} = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{b^2} \cdot 2d \tag{8}$$

Sei nun S der Abstand der beiden Ruhelagen. Nun nähern wir den Winkel mit

$$\varphi \approx \tan\varphi = \frac{S}{2L} \tag{9}$$

geschickt an, da dieser in unserem Versuch sehr klein war. So erhalten wir nach Umstellen für γ die Formel

$$\gamma = \frac{\pi^2 \cdot b^2dS}{T^2m_2L} \tag{10}$$

in welcher ausschließlich Messgrößen des Experimentes stehen und somit eine direkte Bestimmung der Gravitationskonstanten ermöglichen.

3 Durchführung

Zu Beginn des Versuches befand sich die Gravitationswaage im Gleichgewicht, der Laserpointer zeigte konstant 149cm auf der Skala ab. Um die empfindliche Anordnung nicht durch versehentliche Stöße aus dem Gleichgewicht zu bringen, maßen wir die Entfernung zwischen Spiegel und Wandskala erst nach Versuchsende. Dieser Abstand betrug 612 cm. Zeitgleich zur Positionsänderungen der großen Kugeln ($m_2 = 1,5\,\mathrm{kg}$) wurde eine Stoppuhr gestartet und alle 15 Sekunden (später nur noch alle 30s) die Position des Laserpunktes auf der Skala notiert. Die zu jedem Zeitpunkt ermittelten Positionen sind auf dem Messprotokoll im Anhang zu finden. Sie sind in unterem Schaubild grafisch dargestellt.

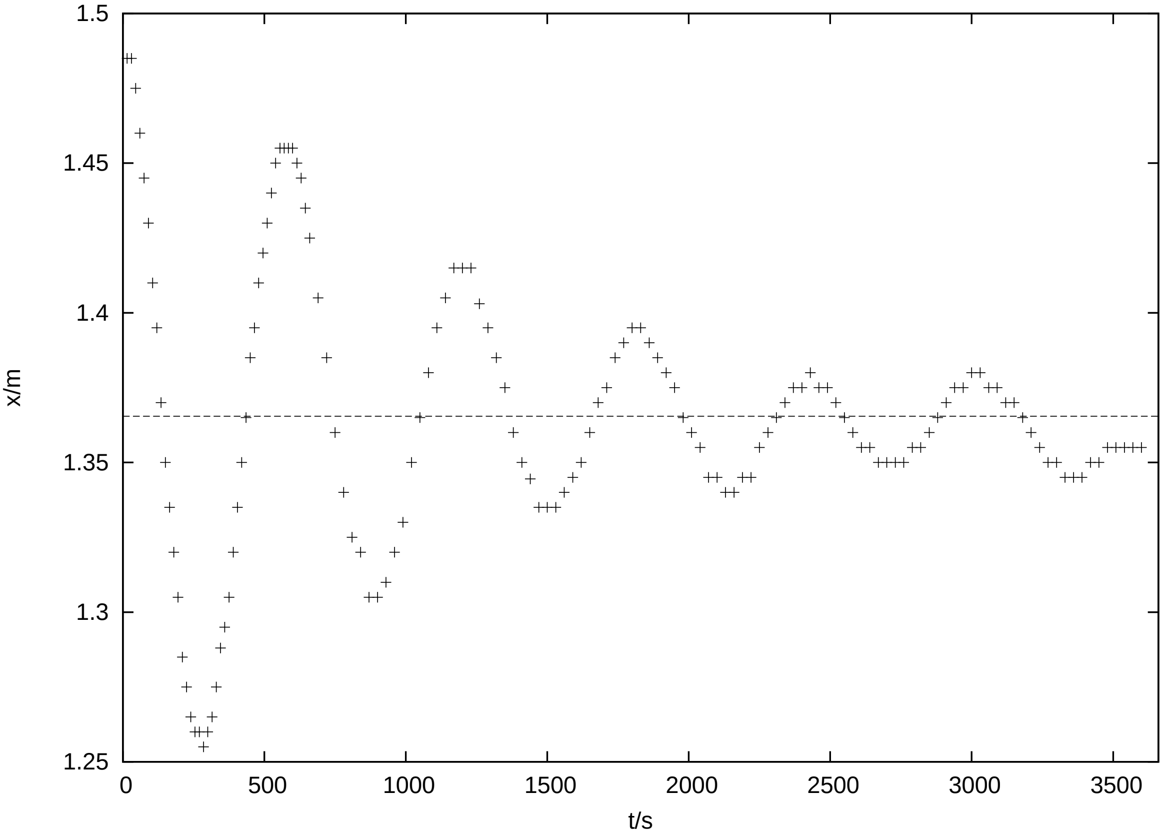
4 Messdaten

Die Ruhelage (Position x_0 an der Wandskala) der Drehwaage vor dem Umlegen der Kugeln lag bei:

$$x_0 = 1,490\,\mathrm{m} \tag{11}$$

Der Abstand zwischen Spiegel der Drehwaage und Wandskala beträgt:

$$L = 6.117\,\mathrm{m} \tag{12}$$



Das Diagramm zeigt die gemessenen Position x an der Wandskala sowie die neue Gleichgewichtslage x_1.

Die neue Gleichgewichtslage liegt bei etwa

$$x_1 \approx 1,36\,\mathrm{m} \tag{13}$$

Dieser zunächst geschätzte Wert erfüllt folgende Kriterien: Die Anzahl der Messpunkte über der Gleichgewichtslage ist etwa gleich der Anzahl der Punkte unterhalb, die Wert liegt Nahe dem arithmetischen Mittel aller Messwerte und das logarithmische Dekrement ist für diesen Wert näherungsweise konstant.

Die halbe Periodendauer $\frac{1}{2}T$ erhält man als Mittelwerte der Abstände je zweier benachbarter Nulldurchgänge Δt (Nulldurchgänge bei t = 142,5 s, 442,5 s, 750 s, 1065 s, 1380 s, 1650 s, 2010 s, 2280 s, 2580 s, und 2850 s):

$$T \approx \overline{\Delta t} \approx 602\,\mathrm{s} \tag{14}$$

5 Auswertung

Setzt man diese Werte in (10) ein, so erhält man mit $S = x_0 - x_1 = 0,13\,\mathrm{m}$:

$$\gamma = \frac{\pi^2 \cdot b^2 dS}{T^2 m_2 L} = \frac{\pi^2 \cdot (0,05\,\mathrm{m})^2 \cdot 0,05\,\mathrm{m} \cdot 0,13\,\mathrm{m}}{(602\,\mathrm{s})^2 \cdot 1,5\,\mathrm{kg} \cdot 6.117\,\mathrm{m}} = 4,8 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2} \tag{15}$$

6 Fehlerbetrachtung

Beim diesem Experiment müssen verschiedene Größen präzise bestimmt werden; außerdem ist der Versuch empfindliche gegen äußere Störeinflüsse. Mögliche Fehlerquellen sind:

- Die Entfernung L zwischen Spiegel und Wandskala lässt sich nicht direkt messen, da das Maßband durchhängt. Wir messen daher die Projektion auf den Boden und gehen von einem Fehler von $\pm 5\,\mathrm{cm}$ aus.
- Für die Bestimmung der Differenz der Positionen der Ruhelage S ist die Ablesegenauigkeit der Positionen x auf der Skala mit 1cm breiten Schwarz-Weiß-Streifen ausschlaggebend. Da hier ein Momentanwert bestimmt werden muss während der Laserpunkt in Bewegung ist, gehen wir von einem Fehler von $\pm 2\,\mathrm{cm}$ aus.
- Die beiden als $5\,\mathrm{cm}$ gegebenen Abstandsgrößen d und b der Kugeln behaften wir mit einem Fehler von $\pm 0,5\,\mathrm{cm}$.
- Für das mit $1,5\,\mathrm{kg}$ angegebene Gewicht der großen Bleikugeln nehmen wir einen Fehler von $\pm 0,05\,\mathrm{kg}$ an.
- Da die Zeit sehr ungenau (15s bis 30s Raster, Reaktionszeit) gemessen wurde, die Periodendauer T allerdings durch Mitteln über viele Perioden gewonnen wurde, gehen wir hier von einem Fehler von $\pm 15\,\mathrm{s}$ aus.
- Ein weiterer Fehler ist durch Graviationswechselwirkungen mit der anderen großen Kugel oder der Betonsäule direkt hinter der Drehwaage zu erwarten

Diese Fehler sind unabhängig von einander. Es gilt für den Gesamtfehler:

$$\left(\frac{\delta\gamma}{|\gamma|}\right)^2 = 2^2 \cdot \left(\frac{\delta b}{|b|}\right)^2 + \left(\frac{\delta d}{|d|}\right)^2 + \left(\frac{\delta S}{|S|}\right)^2 + 2^2 \left(\frac{\delta T}{|T|}\right)^2 + \left(\frac{\delta m_2}{|m_2|}\right)^2 + \left(\frac{\delta L}{|L|}\right)^2 \tag{16}$$

Damit lautet unser Endergebnis:

$$\gamma = 4,8 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2} \pm 28\% \tag{17}$$

Der Literaturwert

$$\gamma_{\text{Literatur}} = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2} \tag{18}$$

liegt gerade noch innerhalb der abgeschätzten Fehlergrenzen.

7 Fragen

7.1 Wie verringert man die Störung der Kugeln untereinander?

Dadurch, dass die kleine Kugel nicht nur von ihrer großen partnerkugel, sondern auch von der gegenüberliegenden großen Kugel angezogen wird, ergibt sich eine geringfügige Verfälschung. Leider lassen sich Gravitationsfelder mit keiner bekannten Methode abschirmen, so dass man die Ungenauigkeit lediglich verringern kann. Hierbei kommt uns zugute, dass die Gravitationsanziehung mit dem Quadrat des Abstandes kleiner wird, also bietet sich an, die Anordung der Hanteln einfach zu verlängern (bei gleichbleibendem b), so dass der Effekt vernachlässigbar klein wird.

7.1.1 Berechnen dieser Störung

Wir vergleichen die Anziehung der einen Kugel mit der der anderen:

$$F_1 = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{b^2} \tag{19}$$

$$F_2 = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{(2d\cos\theta)^2} \tag{20}$$

$$\text{mit } \tan\theta \approx \frac{b}{d} \tag{21}$$

Hier sieht man nun, dass wenn man d relativ klein gegenüber b wählt, die zweite Kraft vernachlässigbar klein wird. Desweiteren ist zu beachten, dass nur die störende Komponente in Tangentialrichtung der Drehung das Ergebnis verfälscht, da die kleinen Kugeln untereinander radial nicht ihre Lage verändern können – sie sind ja starr miteinander verbunden. In unserem Beispiel mit $b = d$ ist die Störkraft kleiner als 15 % der zu messenden Kraft.

7.2 Wie stark beeinflusst die Dämpfung die Schwingungsdauer?

Bei einem gedämpften Schwingungssystem muss man damit rechnen, dass es langsamer schwingt als bei einem ungedämpften. Diese Gesetzmäßigkeit ist mit folgender Formel gegeben:

$$T = T_o \cdot \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4 * \pi^2}} \tag{22}$$

wobei Λ das logarithmische Dekrement darstellt

$$\Lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} \tag{23}$$

welches bei unseren Messwerten im Bereich $\ln 1,5 \approx 0,4$ liegt. Quadriert man dieses und teilt es durch $4 \cdot \pi^2$, erhält man einen sehr kleinen Wert, der die Periodendauer also kaum ändert. In unserem Experiment ist also nicht damit zu rechnen, dass dieser Effekt groß zu Buche schlägt, wenn man ihn mit der groben zeitliche Erfassung unserer Daten vergleicht.

7.3 Berechnung der Erdmasse

Eine Masse an der Erdoberfläche wird mit 9,81 N pro kg angezogen. Stellen wir nun das Gravitationsgesetz entsprechend um, so haben wir:

$$m_1 = \frac{F}{m_2} \cdot \frac{R^2}{\gamma} \tag{24}$$

wobei der erste Bruch unsere 9,81 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$ sind. Durch Einsetzen folgt:

$$m_1 = 9,81 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot \frac{R^2}{\gamma} \approx 5,983 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \tag{25}$$

als ungefähre Erdmasse.

7.4 Warum darf man sich die Masse einer Kugel in einem Punkt vereinigt denken?

Das Newtonsche Gravitationsgesetz get davon aus, dass man das Gravitationsfeld einer konstant dichten Hohlkugel als das einer in ihrem Mittelpunkt vereinigten Massenkonzentration betrachten kann. Warum dies so ist, wird uns anschaulich klar, wenn wir die Kraft auf einen Massenpunkt m_2 im Abstand r vom Kugelmittelpunkt betrachten. Diese setzt sich zusammen aus den Gravitationswirkungen der ganzen infinitesimalen Massenelemente der Kugel. Aufgrund der Geometrie können wir sofort sagen, dass die Gesamtkraft nur in Richtung des Mittelpunktes der Kugel m_1 wirken kann, denn zu jedem Massenelement gibtes ein gegenüberliegendes Massenelement mit genau entgegengerichteter Tangentialkomponente, so dass nach Integration über die gesamte Kugel sich diese gegenseitig zu Null addieren. Das Massenstück m_2 erfährt damit eine Gravitationskraft, die es auf den Mittelpunkt von m_1 hinbeschleunigt, und zwar aufgrund der Kugelsymmetrie unabhängig davon, in welchem Raumwinkel es sich relativ zur großen Kugel befindet. Für die Probemasse ist es damit vollkommen gleichgültig, ob es sich im Gravitationsfeld einer Punktmasse oder einer kugelförmigen Massenverteilung befindet. Betrachten wir noch den Betrag, welcher sich durch Aufintegrieren der Hohlkugelscheiben, deren gravitative Wirkung die Probemasse sieht:

$$\frac{\mathrm{d}F}{m_2} = \gamma \frac{\mathrm{d}m}{r^2} = \gamma \frac{2\pi R^2 h\rho \cdot \sin\vartheta}{r^2}\mathrm{d}\vartheta \tag{26}$$

wobei ϑ der Innenwinkel der zu integrierenden Kugelscheibchen ist, R der Radius, h die Dicke der Hohlkugel(hier infinitesimal) und ρ die Dichte. Diese Gleichung ergibt sich aus der Geometrie, wenn man das Bild im Skript betrachtet. Integrieren wir über alle diese Raumwinkel, ist die Hohlkugel komplett:

$$\frac{F}{m_2} = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}F}{m_2}\mathrm{d}\vartheta = \gamma \cdot 2\pi R^2 h\rho \cdot \int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta}{r^2}\mathrm{d}\vartheta = \gamma \cdot 4\pi R^2 h\rho \cdot \frac{1}{r^2} \tag{27}$$

Dies lässt sich vereinfachen, da der Term in der Mitte nichts anderes darstellt als die Masse m_1 der betrachteten Hohlkugel:

$$\frac{F}{m_2} = \gamma \cdot \frac{m_1}{r^2} \tag{28}$$

womit eindeutig ist, dass der Betrag der Kraft auf m_2 genau gleich dem Betrag wäre, den eine punktförmige Masse ausüben würde. Da der Schluss von ineinandergeschachtelten Hohlkugeln auf eine Vollkugel trivial ist, gilt Newtons Vereinfachung damit für jede kugelsymmetrische Massenverteilung.

7.5 Wie geht die Ausdehnung der kleinen Kugeln in das Trägheitsmoment ein?

Hierbei haben wir ebenfalls idealisiert, da wir auch die kleinen Kugeln als Punktmassen angenommen haben. Der Steinersche Satz hilft uns bei bekanntem Trägheitsmoment der Kugeln weiter, wobei a der Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse ist:

$$J_{exakt} = J_{Kugel} + ma^2 = \frac{2}{5}m_2 r^2 + m_2 a^2 \tag{29}$$

Die Idealisierung, die wir verwendet haben, vernachlässigt den ersten Summanden, das Trägheitsmoment, das von der Kugel selbst beigetragen wird. Da deren Radius im vergleich zu a klein ist, ist dies eine recht nützliche Annäherung.

7.6 Warum sind Goldkugeln besser?

Da Gold um einiges dichter ist als Blei, haben die kleinen Kugeln bei gleicher Masse einen kleineren Radius, was aus obengenannten Gründen besser ist, um das Trägheitsmoment genauer zu approximieren.

7.7 Wie stark ist die Gravitation zwischen Elektron und Proton im Vergleich zur Coulombkraft?

Im Wasserstoffatom umkreist das Elektron das Proton im Abstand 53 pm. Die Ruhemassen erhält man durch Nachschlagen. Damit ist:

$$F_G = \gamma \cdot \frac{m_p \cdot m_e}{r^2} = \gamma \cdot \frac{1,67 \cdot 10^{-27}kg \cdot 9,10 \cdot 10^{-31}kg}{(53pm)^2} \approx 3,6 \cdot 10^{-47}N \tag{30}$$

Vergleichen wir dies mit der Coulomb-Anziehung, so stellen wir mit $q_1 = q_2 = e$ fest:

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \approx 8,19 \cdot 10^{-8}N \tag{31}$$

welches riesige 39 Größenordnungen über der Gravitationsanziehung liegt.